

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

18



# ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

МЕХАНИКА  
ЖИДКОСТИ И ГАЗА

ТОМ 18



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

СЕРИЯ  
МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ  
И ГАЗА

Том 18

Серия издается с 1966 г.

*Библиотека кафедры  
гидромеханики МГУ*



МОСКВА 1984

# ДИНАМИКА СВОБОДНЫХ СТРУЙ И ПЛЕНОК ВЯЗКИХ И РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

*В. М. Ентов, А. Л. Ярик*

## ВВЕДЕНИЕ

Своеобразная гидродинамика свободных струй и пленок капельных жидкостей издавна привлекала внимание исследователей и инженеров. Такие крупнейшие ученые, как Савар, Плато, Буссинеск, Релей, Бор, Тейлор, Вольтерра, Леви-Чивита, Дебай и Чандрасекар посвятили свои труды изучению механизма распространения и распада жидких струй и пленок. Эти явления интересны не только своей красотой, но и возможностями, широкого использования в разнообразных технических приложениях, порой самых неожиданных. До сего времени, по-видимому, нет монографий (не считая работы J. N. Anpo [2], в которой в основном анализируется рост малых капиллярных возмущений струй), специально посвященных гидродинамике свободных струй и пленок, хотя изложение основных результатов теории и экспериментальных данных содержится в ряде книг (В. Г. Левич [1], Ю. Ф. Дитякин, Л. А. Клячко, Б. В. Новиков и В. И. Ягодкин [1], А. Ziabicki [1]). Работы последнего времени, а также общие вопросы теории не нашли отражения ни в этих книгах, ни в более поздних обзорах, посвященных, главным образом, отдельным аспектам проблемы и ориентированных на конкретные приложения. Так, M. J. McCarthy и N. A. Molloy [1] в основном рассматривают в своем обзоре влияние формы и внутренней геометрии насадка на течение в струе, В. И. Кабаков и И. Т. Аладьев [1] анализируют распространение и распад струй применительно к использованию в энергетических установках, М. М. Денп [1] касается формирования волокон, а В. Я. Шкадов, С. П. Радев, И. П. Пенчев и П. Н. Господинов [1] — стационарного течения и капиллярной неустойчивости тонких струй. Вопросы, связанные с разрушением удлинённых капель и нитей в течениях растяжения, частично рассмотрены в обзоре А. Л. Гонора и В. Я. Ривкинда [1].

В предлагаемом обзоре в основном рассматриваются работы, напечатанные в 1973—1983 гг. Отражены в нем также работы предшествующего периода, результаты которых необходимы для полноты изложения. Целью обзора является анализ широкого спектра физических явлений, характерных для динамики свободных струй и пленок капельных жидкостей. Группировка материала обзора отвечает основным физическим механизмам рассматриваемых течений. Особое внимание уделено интенсивно развивавшемуся в последние годы подходу, связанному с понижением размерности задачи — описанием струи как одно-

мерного, а пленки — как двумерного континуума. Такой подход ведет к существенным упрощениям и позволяет учесть ряд новых эффектов, в частности, специфику реологического поведения жидкости и взаимодействие струи с воздухом.

Обзор состоит из пяти глав. В первой главе рассматривается капиллярный распад свободных тонких струй ньютоновских жидкостей и влияние на него различных осложняющих факторов: нелинейных взаимодействий мод, давления и вязкого трения окружающей среды, закрутки, формы и внутренней геометрии насадка, электрического и магнитного полей, а также эффектов тепло- и массопереноса на поверхности струй. Вторая глава посвящена особенностям капиллярного распада струй нелинейно-вязких и упруговязких (растворы полимеров) жидкостей. В третьей главе рассматриваются вопросы, связанные с динамикой изгибных возмущений высокоскоростных струй, движущихся в воздухе, влиянием турбулентности жидкости на распад и распыливание струй при очень больших скоростях движения. Рассматривается также изгиб струй при выпучивании, обусловленном продольным сжатием. Четвертая глава посвящена формированию волокон. В ней вкратце освещены вопросы устойчивости процесса формирования, влияния на него теплообмена с окружающей средой и явлений кристаллизации и ориентации макромолекулярных цепей. Свободные жидкие пленки, их конфигурации, устойчивость, разрушение и свободные ребра на их краях составляют тему пятой главы. В заключении описаны некоторые приложения свободных струйных и пленочных течений в технике и научном эксперименте.

## *Глава 1*

### **КАПИЛЛЯРНЫЙ РАСПАД ТОНКИХ СВОБОДНЫХ СТРУЙ ВЯЗКИХ НЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ**

Настоящая глава посвящена рассмотрению основных результатов, полученных при исследовании капиллярного распада тонких свободных струй ньютоновских жидкостей. Действие сил поверхностного натяжения, стремящихся уменьшить свободную поверхность струи, делает струю неустойчивой и приводит к ее распаду на капли. Скорость роста капиллярных возмущений и длительность дополнительного факторов: динамического действия окружающей среды и т. д.

#### **§ 1. Стационарные конфигурации струй при истечении из насадков**

Как правило, при исследовании устойчивости струи предполагается, что она представляет собой жидкий цилиндр. Такое предположение очевидно неприемлемо вблизи выхода струи из

насадка, где происходит перестройка течения, обусловленная исчезновением напряжений, действующих на боковую поверхность потока жидкости при движении в трубке. Исследованиям такой перестройки и оценке длины начального участка, начиная с которой применимы результаты, касающиеся устойчивости, посвящен настоящий параграф.

В последнее время для исследования перестройки течения при выходе из насадка и формировании свободной струи интенсивно применяются численные методы. Так, R. E. Nickell, R. I. Tanner и В. Caswell [1], К. R. Reddy и R. I. Tanner [1], В. J. Omodei [2], R. L. Gear, М. Keentok, J. F. Milthorpe и R. I. Tanner [1] провели расчет течения как в насадке, так и в свободной струе на основе уравнений Навье—Стокса с использованием метода конечных элементов. Система уравнений неразрывности и количества движения

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1.1)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

интегрируется с граничными условиями прилипания к стенкам насадка (при  $z \rightarrow -\infty$  в нем задается паузейлев профиль скорости) и условиями для напряжений на свободной поверхности струи

$$\sigma_{nr} = 0, \quad \sigma_{nn} = -\alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (1.2)$$

Здесь  $u$  и  $w$  — радиальная и осевая компоненты скорости жидкости,  $r$  и  $z$  — радиальная и осевая координаты  $F_r$  и  $F_z$  — радиальная и осевая компоненты массовой силы,  $p$  — давление,  $\sigma_{nr}$  и  $\sigma_{nn}$  — касательные и нормальные напряжения на свободной поверхности,  $\rho$  — плотность,  $\mu$  и  $\alpha$  — коэффициенты вязкости и поверхностного натяжения,  $R_1$  и  $R_2$  — главные радиусы кривизны свободной поверхности. Отметим, что фактически, при  $z \rightarrow \infty$  в струе задается давление.

В соответствии с экспериментальными данными показано, что в результате перестройки профиля скорости (от паузейлева к практически однородному) при наличии сил поверхностного натяжения для  $Re \leq 15$  (число Рейнольдса  $Re$  составлено по условиям истечения) диаметр струи увеличивается с удалением от насадка вплоть до достижения постоянного значения. При  $Re \approx 15$  конечный диаметр струи равен диаметру насадка (при  $Re \approx 15$  наблюдается утоньшение струи вблизи насадка с ее последующим расширением до первоначального диаметра). При  $Re \geq 15$  струя утоньшается, начиная от насадка. При  $Re \rightarrow 0$  ко-

эффицент расширения струи согласно расчетным данным достигает величины 1.13. Расчеты предсказывают для ламинарного режима течения, что с ростом числа  $Re \gg 1$  коэффициент сжатия струи убывает до значения 0.86. Эксперименты показывают, что для струи с  $Re = 10^3$  коэффициент сжатия составляет 0.83 и 0.7 для  $Re = 10^4$ ; с дальнейшим ростом  $Re$  он может еще уменьшиться до значения 0.6 (J. Iciek [2]). Отметим, что в случае достаточно вязких жидкостей характерным временем перестройки профиля скорости будет  $\rho a_0^2/\mu$  и, следовательно,  $L/a_0 = Re/2$  (здесь  $L$  — длина вдоль струи, на которой заканчивается перестройка струи). Эта оценка применима в промежуточном диапазоне значений числа  $Re$ . Совпадение с экспериментом получено в расчетах с  $Re \leq 100$  не только по величине диаметра струи, достигаемого после перестройки течения, но и по форме струи на всем начальном участке (B. J. Omodei [2], R. L. Gear, M. Keentock, J. F. Milthorpe и R. I. Tanner [1]).

Влияние неодородностей начального профиля скорости, а также влияние силы тяжести на форму свободных струй вблизи насадка изучено в работах В. Е. Епихина и В. Я. Шкадова [1] и В. И. Елисеева [1, 2, 4].

Начальный участок струй вязких жидкостей, распространяющихся в другой несмешивающейся жидкости, исследовали J. L. Duda и J. S. Vrentas [1], В. Е. Епихин и В. Я. Шкадов [1], В. Я. Шкадов, Л. П. Холпанов, В. Е. Епихин, Н. С. Мочалова, В. А. Малюсов и Н. М. Жаворонков [1] и P. Gospodinov, I. Penchev и S. Radev [1] с помощью численных расчетов с использованием уравнений типа уравнений пограничного слоя, справедливых при  $Re \geq 200$ . При этом характер течения в струе позволяет пренебречь старшими производными по продольной координате (см., например, работы В. Я. Шкадова [1, 2] и К. М. Магомедова [1], посвященные этому вопросу). Сравнение результатов, полученных для суживающихся струй на основе уравнений Навье—Стокса, с данными, полученными с использованием уравнений типа уравнений пограничного слоя, проведено в работе J. S. Vrentas'a и С. М. Vrentas'a [1]. Имеются также численные расчеты в стоксовом безынерционном приближении (A. Dutta и M. E. Ryan [1]) и аналитические решения S. A. Trogdop'a и D. D. Joseph'a [1, 2]. При распространении жидкой струи в несмешивающейся жидкости существенную роль играет вязкое трение на поверхности, в результате чего профиль скорости в струе после перестройки не становится плоским. Интерес представляет также задача об остывании и отвердевании струи расплава после истечения из отверстия фильеры (В. И. Елисеев [3], В. Е. Епихин, А. Е. Кулаго и В. Я. Шкадов [2]).

Влияние осевой закрутки на конфигурацию начального участка струй, истекающих из отверстий и насадков, исследовано в работе В. Е. Епихина [4].

Для расчета начального участка жидких струй в несмешивающихся жидкостях широко применяются и интегральные методы теории пограничного слоя, в которых профиль скорости задается в виде полинома. Эти методы позволяют свести задачу к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (Н. Yu и G. F. Scheele [1], A. H. P. Skelland и Y. F. Huang [1] и M. M. Anwar, A. Bright, T. K. Das и W. L. Wilkinson [1]). В последней работе в рамках интегрального метода учтено также влияние архимедовой силы и проведено широкое сопоставление с экспериментальными данными. В частности, в эксперименте получены струи воды в керосине и в растворе парафина, утолщающиеся после истечения из насадка, и дано удовлетворительное теоретическое описание изменения их диаметра. В случае слабого изменения течения в радиальном направлении весьма плодотворным оказывается квазиодномерный подход (D. D. Joseph, K. Nguyen и J. E. Matta [1]), который сводит задачу об эволюции струи к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Основные идеи, касающиеся квазиодномерного подхода, изложены в § 3 данной главы.

Суммируя, отметим, что достаточно большие вязкая диссипация внутри струи или вязкое трение на ее поверхности ведут к падению скорости и, следовательно, к расширению струи после истечения. Такое же действие оказывает выталкивающая сила. Струи с доминирующими инерционными эффектами, а также струи, ускоряемые силой тяжести, утоньшаются после истечения. Поверхностное натяжение препятствует как расширению, так и утоньшению. Этим определяется, в частности, влияние на течение на начальном участке струи растворенных поверхностно активных веществ (J. T. Davies, и R. W. Makepeace [1]). Некоторое влияние оказывает форма насадка, в частности, отношение его длины к диаметру, определяющее степень развития профиля скорости на выходе (M. J. McCarthy и N. A. Molloy [1]).

## § 2. Рост малых возмущений.

### Границы применимости теории Релея — Вебера

В основе развития теории распада струй лежит классическая постановка задачи, предложенная Релеем в 1878 г. (изложена в монографиях Rayleigh'a [1] и В. Г. Левича [1], в которой предполагается, что в распаде струи на капли проявляется неустойчивость бесконечного «столба» жидкости кругового сечения радиуса  $a_0$  под действием сил поверхностного натяжения. Результат Релея может быть получен как решение линеаризованных относительно малых возмущений уравнений Эйлера в цилиндрических координатах  $r, \theta, x$  при соответствующим образом линеаризованных граничных условиях, учитывающих возмущение поверхности струи. В предположении, что возму-

щения зависят от времени  $t$ , азимутальной и осевой координат  $\theta$  и  $x$  как  $\exp(i\omega t - ikx + is\theta)$ , характеристическое уравнение имеет вид

$$i\omega = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\rho a_0^3} \frac{\chi I_s'(\chi)}{I_s(\chi)} (1 - s^2 - \chi^2)}. \quad (1.3)$$

Здесь  $i\omega = \gamma - i$  инкремент возмущений,  $\chi = 2\pi a_0/l$  — волновое число ( $l$  — длина волны возмущения)  $s$  — целое число,  $I_s(\chi)$  и далее  $K_s(\chi)$  — модифицированные функции Бесселя  $s$ -го порядка.

В случае осесимметричных возмущений ( $s=0$ ) подкоренное выражение в (1.3) положительно при  $\chi < 1$ , и одно из значений инкремента  $\gamma$  вещественно и положительно. Наличие действительного положительного значения  $\gamma$  определяет нарастание возмущений со временем. Следовательно, «столб» жидкости неустойчив по отношению к осесимметричным возмущениям с длиной волны  $l > 2\pi a_0$  ( $\chi < 1$ ). Растущие возмущения представляют собой систему стоячих по отношению к столбу жидкости волн с растущей во времени амплитудой (см. рис. 1). Результат



Рис. 1. Капиллярный распад струи ньютоновской жидкости

Релея означает, что состояние «столба» (и струи) жидкости, не обеспечивающее минимума поверхностной энергии, неустойчиво. Вследствие роста длинноволновых ( $\chi < 1$ ) осесимметричных возмущений поверхность жидкого цилиндра уменьшается, что и приводит к распаду струи на капли (это объяснение распаду дал еще Плато). Наибольшее значение  $\gamma_*$  инкремента нарастания возмущений принимает при  $\chi = \chi_* = 0.698$ . Релей предположил, что распад реальной струи на капли обусловлен ростом возмущений с той же длиной волны  $l_* = 2\pi a_0/\chi_*$ , что и в случае бесконечного жидкого столба. Считая, что в продолжение всего процесса распада линейный подход достаточно точен и определяя время  $T$ , в течение которого амплитуда возмущений поверхности струи становится равной начальному радиусу, можно вычислить время  $T$  и длину струи до распада

$$T = \frac{\ln(a_0/\delta_0)}{\gamma_*}, \quad L = V_0 T. \quad (1.4)$$

Здесь  $\delta_0$  — амплитуда начального возмущения (как правило, она неизвестна, а величина  $\Delta = \ln(a_0/\delta_0)$  определяется эмпирически при сопоставлении теоретического и экспериментального значений  $L$  при некоторой скорости истечения струи  $V_0$ ).

В случае неосесимметричных возмущений ( $s \geq 1$ ) инкремент, определяемый выражением (1.3), будет мнимым для всех длин



воли, столб жидкости (струя) устойчивым, а возмущения представляют собой бегущие волны постоянной амплитуды.

Подход Релея был распространен на случай вязкой жидкости в работе С. Weber'a [1]. Решив линеаризованные относительно малых возмущений уравнения Навье—Стокса, он учел влияние вязкости жидкости на скорость роста осесимметричных капиллярных возмущений (см. также работы J. N. Anpo [1, 2], в которых применяется энергетический подход). Характеристическое уравнение, полученное Вебером, имеет вид

$$(i\omega)^2 \frac{I_0(\chi)}{2\chi^{-1}I_1(\chi)} + (i\omega)\mu \frac{\chi^2}{\rho a_0^2} \left[ 2 \frac{I_0(\chi)}{\chi_1 I_1(\chi)} - 1 + \frac{2\chi^2}{\chi_1^2 - \chi^2} \left( \frac{I_0(\chi)}{\chi^{-1}I_1(\chi)} - \frac{I_0(\chi_1)}{\chi_1^{-1}I_1(\chi_1)} \right) \right] = \frac{\alpha}{\rho a_0^3} \frac{\chi I_0'(\chi)}{I_0(\chi)} (1 - \chi^2), \quad (1.5)$$

$$\chi_1^2 = \chi^2 + (i\omega) \frac{\rho a_0^2}{\mu}.$$

Можно показать, что для анализа неустойчивости достаточно ограничиться длинноволновым приближением ( $\chi < 1$ ). При этом характеристическое уравнение приближенно сводится к

$$(i\omega)^2 + \frac{3\mu}{\rho a_0^2} \chi^2 (i\omega) + \frac{\alpha}{\rho a_0^3} \frac{\chi^2}{2} (\chi^2 - 1) = 0. \quad (1.6)$$

Полученный результат количественно описывает стабилизирующую роль вязкости. При  $\mu = 0$  уравнение (1.6) совпадает с длинноволновым приближением уравнения (1.3) для осесимметричного случая ( $s = 0$ ).

Решение уравнения (1.6) и волновое число  $\chi_*$ , отвечающее в соответствии с этим решением наиболее быстро растущему возмущению (скорость роста  $\gamma_* = i\omega_* = \psi(\chi_*)$ ), даются в безразмерном виде выражениями

$$\frac{i\omega_* \mu a_0}{\alpha} = -\frac{3}{2} Z \chi_*^2 + \sqrt{\frac{9}{4} Z^2 \chi_*^4 + \frac{Z \chi_*^2}{2} (1 - \chi_*^2)}, \quad (1.7)$$

$$\chi_* = \left[ 2 \left( 1 + 3 \sqrt{\frac{Z}{2}} \right) \right]^{-1/2}.$$

(безразмерный параметр  $Z = \mu^2 / (\rho a_0 \alpha)$  носит название числа Онезорге). При этом из (1.4) следует, что длина струи вязкой ньютоновской жидкости до распада  $L$  линейно зависит от  $V_0$ . Этот вывод теории подвергся проверке в многочисленных экспериментальных работах (А. Haenlein [1], А. С. Лышевский [1, 2], R. P. Grant и S. Middleman [1] и J. Iciek [1, 2]). Эксперименты проводились с ньютоновскими жидкостями, у которых  $\alpha/\rho \approx (30 \div 70) \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}^2$ ,  $\mu/\rho \approx (10^{-3} \div 10) \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ , причем значения числа Онезорге  $Z$  струй отвечали диапазону  $10^{-4} - 10^3$ . Для струй вязких ньютоновских жидкостей, движущихся в воздухе, получены зависимости  $L = L(V_0)$ , типичный вид которых иллюстрируется рис. 2. Наличие линейного участка ВС подтверждает вывод теории Релея—Вебера о том, что  $L \sim V_0$ . Выбрав значение  $\Delta = \ln(a_0/\delta_0)$  из диапазона 10—14 (прямых из-

мерений  $\delta_0$  до сих пор нет), удается количественно описать с помощью (1.3) (или (1.7) для вязкой жидкости) и (1.4) линейный участок экспериментальных зависимостей  $L=L(V_0)$ . Отметим, что согласно данным R. P. Grant'a и S. Middleman'a [1] и J. Iciek'a [1]  $\Delta = -1.33 \ln Z + 7.68$ . Кроме того, в работах R. J. Donnelly и W. Glaberson'a [1], E. F. Goedde и M. C. Yuen'a [1], M. Gordon'a, J. Yerushalmi и R. Shinnar'a [1] и H. E. Cline'a и T. R. Anthony [1] была экспериментально получена зависимость инкремента от длины волны возмущения. Осесимметричные возмущения струй с  $\chi > 1$  оказались затухающими, а для растущих возмущений ( $\chi < 1$ ) получено, что выражения (1.3) и (1.7) хорошо описывают экспериментальные данные (см. рис. 3).

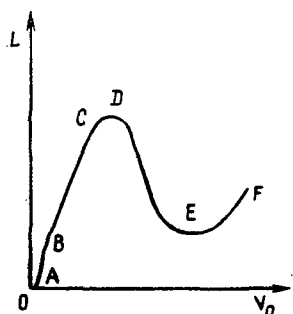


Рис. 2. Зависимость длины струи ньютоновской жидкости, движущейся в воздухе, от скорости истечения, суммирующая экспериментальные данные различных авторов

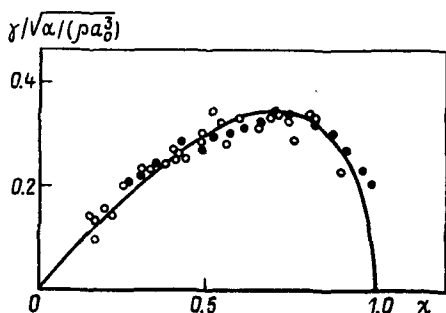


Рис. 3. Инкремент нарастания капиллярных возмущений тонкой струи воды. Сплошная линия — теория Релея; кружки — экспериментальные данные R. J. Donnelly и W. Glaberson'a [1]; зачерненные кружки — экспериментальные данные H. E. Cline'a и T. R. Anthony [1]

Сравнение предсказаний теории Релея—Вебера с экспериментальными данными показало, что ее линейность не ограничивает возможности достаточно точного определения важнейшей интегральной характеристики капиллярного распада — длины сплошной части струи.

Таким образом, в целом теория Релея—Вебера, количественно описывая такое сложное и практически важное явление как распад струи, представляет собой одно из наиболее серьезных достижений теоретической гидродинамики. Вместе с тем при более детальном рассмотрении обнаруживается ряд обстоятельств, требующих своего разъяснения. Укажем, прежде всего, вопросы «внутритеоретические».

1. В теории Релея—Вебера рассматривается развитие во времени возмущений на пространственно-однородной струе (так называемая «временная» неустойчивость. Фактически рост возмущений и распад струи происходят по мере удаления от

сопла при стационарном истечении («пространственная» неустойчивость). Соотношение между этими двумя типами неустойчивости и возможность переноса результатов по временной неустойчивости на пространственную нуждаются в особом исследовании.

2. Распад струй маловязких жидкостей происходит на расстояниях, сопоставимых с длиной участка релаксации профиля скорости и формирования однородной струи. Результаты В. Е. Епихина и В. Я. Шкадова [1], I. P. Penchev'a и S. P. Radev'a [1], S. Radev'a, B. Chavdarov'a и I. Penchev'a [1] показывают, что наличие в струе развитого профиля продольной скорости и его перестройка могут в несколько раз изменить скорость роста возмущений. Определенное влияние на устойчивость струй оказывает и ускорение струй силой тяжести (В. И. Елисеев [5]).

3. При согласовании с экспериментом в теории появляется коэффициент  $\Delta \approx 10 \div 14$ , трактуемый как логарифм отношения амплитуды возмущений  $A$  в момент распада к амплитуде начальных возмущений  $\delta_0$ . Обратный пересчет дает при  $A \sim a_0 \sim 10^{-3}$  м,  $\delta_0 \sim 10^{-3} \times e^{-(10 \div 14)}$  м, т. е.  $\delta_0 \sim 10^{-(8 \div 9)}$  м. Насколько разумны подобные оценки начальных возмущений для струй, размеры которых видимым образом изменяются по выходе из насадка, остается неясным.

Помимо этого существуют и чисто экспериментальные свидетельства ограниченности теории Релея—Вебера. В эксперименте с капиллярными струями характерно наличие участков  $AB$  и  $CDE$  (см. рис. 2), где зависимость  $L=L(V_0)$  не соответствует предсказаниям теории (участок  $EF$  относится к турбулентным струям и будет рассмотрен в § 3 главы 3).

Отклонения эксперимента от теории при малых скоростях (участок  $AB$ ), как будет показано ниже, являются либо проявлением различия между пространственной и временной неустойчивостью стационарного решения, либо следствием существенной нестационарности течения.

Для объяснения появления максимума и участка убывания в зависимости  $L(V_0)$  предложено несколько гипотез:

1. Динамическое воздействие окружающего воздуха на осесимметричные возмущения струи (ось струи сохраняет прямолинейную форму), увеличивающее давление на поверхности в ее сужениях и уменьшающее — на выпуклостях, что должно вести к более быстрому росту возмущений. Такое воздействие тем более заметно, чем больше скорость истечения струи  $V_0$  (С. Weber [1], Г. И. Петров и Т. Д. Калинина [1], В. Г. Левич [1]). Этот механизм подробно рассмотрен в § 5 данной главы.

2. Изменение механизма распада струи — переход от осесимметричных возмущений к изгибным (изгибается ось струи), усиливаемым распределением давления в окружающем воздухе (А. Haenlein [1] и R. P. Grant и S. Middleman [1]). Рассмотр-

рению динамики изгибных возмущений тонких высокоскоростных струй, движущихся в воздухе, посвящен § 1 главы 3.

3. Переход к турбулентному режиму течения в струе (см., например, работы А. М. Sterling'a и С. А. Sleicher'a [1] и J. Isiek'a [1, 2], в которых эксперименты велись со струями маловязких жидкостей).

4. Влияние вязкости окружающего воздуха, вызывающее в жидкости движения, дестабилизирующие струю. (Так, R. W. Fepp и S. Middleman [1] объяснили независимость распада струй маловязких жидкостей от давления окружающего воздуха, наблюдавшуюся в их экспериментах).

5. Влияние увеличения уровня начальных возмущений с ростом скорости истечения струи (R. E. Phinney [1]), вследствие чего перед экспериментаторами стоит задача принудительной генерации возмущений заданной интенсивности (А. Б. Езерский и В. П. Реутов [1]).

6. Влияние релаксации начального профиля скорости в струе. Такое объяснение для случая струй маловязких жидкостей предложено в работе А. М. Sterling'a и С. А. Sleicher'a [1].

Уже само обилие предложенных объяснений показывает, что единой убедительной теоретической трактовки наблюдаемого максимума в зависимости  $L(V_0)$  не существует. Еще менее ясен механизм появления второго участка возрастания длины струи (участок  $EF$ ). Оставляя дальнейший анализ этих вопросов до последующих разделов работы, остановимся здесь более подробно на соотношении между «временной» и «пространственной» неустойчивостью. Пространственная неустойчивость полубесконечной струи идеальной жидкости была подробно рассмотрена в работе J. В. Keller'a, S. I. Rubinow'a и Y. O. Tu [1]. Считалось, что невозмущенному течению отвечает стационарная струя постоянного радиуса. Возмущения как и в теории Релея представляются в виде  $\varphi(r) \exp(i\omega t - ikx + is\theta)$ , однако считается, что  $\omega$  — заданное действительное число,  $k$  — искомое комплексное число, координатная ось  $ox$  связана не со струей, а с насадком. Таким образом, возмущения поверхности струи представляют собой волны переменной амплитуды, бегущие вдоль струи, причем действительная часть  $k$  определяет длину волны, а мнимая — закон изменения амплитуды. Если мнимая часть  $k$  положительна, то амплитуды возмущений будут расти с ростом  $x$ , что приведет к распаду струи. Характеристическое уравнение задачи в безразмерных переменных имеет вид

$$\beta^2 (\omega_1 - \chi)^2 = \frac{\gamma I_s'(\chi) (\chi^2 + s^2 - 1)}{I_s(\chi)}, \quad (1.8)$$

$$\omega_1 = \omega a_0 / V_0, \quad \beta = \sqrt{\rho a_0 V_0^2 / \alpha} = \sqrt{We/2}.$$

Это уравнение может быть получено непосредственно из (1.3) путем замены  $i\omega \rightarrow i\omega - ikV_0$ , отвечающей переходу в абсолют-

ную систему отсчета, в которой покоится насадок, создающий струю.

Уравнение (1.8) должно быть решено относительно безразмерного волнового числа  $\chi = ka_0$  при заданных значениях безразмерной частоты возмущений  $\omega_1$  и параметра  $\beta$ . Асимптотическими решениями уравнения (1.8) при  $\beta \gg 1$  будут (с учетом поправки Д. В. Вогу [1]).

$$\begin{aligned} \chi &= \omega_1 \pm \frac{1}{\beta} [\omega_1 I_s'(\omega_1) (\omega_1^2 + s^2 - 1) / I_s(\omega_1)]^{1/2} + O(\beta^{-2}), \\ \chi &= \pm i j_{sn} + \frac{2}{\beta^2} [j_{sn} (j_{sn}^2 - s^2 + 1) / (\omega_1^2 + j_{sn}^2)^2] \times \\ &\quad \times [2\omega_1 j_{sn} \mp i (\omega_1^2 - j_{sn}^2)] + O(\beta^{-4}). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь  $s=0, 1, 2, \dots, n=1, 2, 3, \dots$ , а  $j_{sn}$  —  $n$ -ый корень бесселевой функции  $J_s(z)$ . Два решения  $\chi(\omega_1)$ , определяемые первым соотношением (1.9), будут иметь отличную от нуля мнимую часть лишь при  $s=0$  и  $\omega_1 < 1$ , причем знак плюс соответствует неустойчивости, так как в этом случае  $\text{Im}(\chi) > 0$ . Нетрудно видеть, что эта форма пространственной неустойчивости отвечает релеевской временной капиллярной неустойчивости струи (см. также ниже).

Сложнее обстоит дело с решениями, определяемыми вторым соотношением (1.9). При любом  $s$  имеются решения с положительной мнимой частью, более того, она оказывается сколь угодно большой при достаточно больших  $n$ . Формально это означает доминирующий рост (и притом сколько угодно быстрый) неосесимметричных мод возмущений, в противоречии и с теорией Релея, и с экспериментом. J. В. Keller, S. I. Rubinow и Y. O. Tu [1] усматривали выход из противоречия в том, что эти решения имеют действительную часть порядка  $\beta^{-2}$  ( $\beta \gg 1$ ). Следовательно, длина волны соответствующих мод настолько велика, что они просто не могут уместиться на реальной струе конечной длины.

Более адекватным представляется подход Д. В. Вогу [2], который предложил для отбора мод, описывающих распад струи, использовать условия излучения. Перенос энергии каждой из мод связан с ее групповой скоростью  $C_g = d\omega_1/d\text{Re}(\chi)$ . Если незатухающая при  $x \rightarrow \infty$  мода имеет  $C_g < 0$  для каких-либо значений  $\omega_1$ , то это в соответствии со сделанным предположением означает, что данная мода переносит энергию из бесконечности и, следовательно, она физически нереализуема и должна быть исключена на основе условия излучения. В результате исключаются все «лишние» неустойчивые моды и неустойчивость полубесконечной струи при  $\beta \gg 1$  описывается соотношением

$$\begin{aligned} \exp(i\omega t - ikx) &= \exp \left\{ \pm t \sqrt{\frac{\alpha}{\rho a_0^3} \frac{\chi I_s'(\chi)}{I_s(\chi)} (1 - s^2 - \chi^2) - ikx_1} \right\} \\ x_1 &= x - V_0 t. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Выражение (1.10) соответствует результату Релея (1.3). Таким образом, когда  $\beta \gg 1$ , теория «пространственной» неустойчивости переходит в теорию Релея. Из выражения для  $\beta = \sqrt{\rho a_0 V_0^2 / \alpha} = V_0 / v_c$ , где  $v_c = \sqrt{\alpha / (\rho a_0)}$  — характерная скорость капиллярных волн, видно, что теория Релея применима к реальным полубесконечным струям, когда скорость струи много больше скорости  $v_c$ , или скоростной напор  $\rho V_0^2 / 2$  много больше капиллярного давления  $\alpha / a_0$ . (Для воды при  $a_0 = 10^{-4}$  м  $v_c \sim 1$  м/с). Последнее обстоятельство объясняет причины неадекватности теории Релея при малых скоростях (участок  $AB$  на рис. 2): скоростной напор сопоставим с капиллярным давлением, нельзя пренебречь различием между пространственной и временной неустойчивостью и режим истечения является переходным от струйного к капельному. В силу указанных причин сопоставление данных для струй с малыми скоростями истечения с теорией Релея—Вебера, выполненное в работах Г. М. Панченкова и Р. А. Мамлеева [1] и Г. М. Панченкова, Р. А. Мамлеева, М. З. Максименко и В. В. Папко [1], представляется некорректным.

Вопрос об участке  $AB$  в зависимости  $L=L(V_0)$  на рис. 2 имеет и еще один аспект: Д. В. Вогу [6] показал, что для малых скоростей истечения, отвечающих этому участку, при определенных допущениях не существует стационарного решения задачи о струе. Поэтому, возможно, участок  $AB$  отвечает не пространственной неустойчивости стационарного решения, а существенно нестационарному случаю.

### § 3. Квазиодномерный подход

Линейная теория устойчивости струй является исключением в том отношении, что может быть исследована в рамках трехмерных гидродинамических уравнений. Все дальнейшие уточнения связаны либо с непосредственным численным расчетом, либо с асимптотическим исследованием. Одним из наиболее естественных путей асимптотического описания гидродинамики струй представляется построение квазиодномерной теории, в которой струя рассматривается как «оснащенный одномерный континуум», т. е. лишенный поперечных размеров объект, описываемый набором интегральных характеристик — радиусом сечения струи, расходом в сечении и т. д. Такой подход является прямым аналогом гидравлической теории течений в длинных трубах (особенно, течений в трубах с гибкими стенками), и его естественная область применимости — течения, медленно меняющиеся по длине струи. Ниже (§ 1 главы 3) квазиодномерное описание будет рассмотрено более подробно; в данном параграфе речь пойдет лишь о капиллярных струях с прямолинейной осью.

Уравнения, выражающие баланс массы и импульса, запи-

санные в предположении, что скорость и напряжения постоянны по сечению струи, имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial V f}{\partial x} = 0, \quad f = \pi a^2,$$

$$\rho f \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial \sigma_{xx} f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{2\pi a \alpha}{V \sqrt{1 + (\partial a / \partial x)^2}} \right]. \quad (1.11)$$

Здесь  $t$  — время,  $x$  — координата, отсчитываемая вдоль оси струи  $f$  — площадь сечения струи ( $a$  — ее радиус),  $V$  и  $\sigma_{xx}$  — продольные скорость и напряжение в струе. Для вязкой ньютоновской жидкости

$$\sigma_{xx} = 3\mu \frac{\partial V}{\partial x} - \alpha \left\{ \frac{1}{a V \sqrt{1 + (\partial a / \partial x)^2}} - \frac{\partial^2 a / \partial x^2}{[1 + (\partial a / \partial x)^2]^{3/2}} \right\}. \quad (1.12)$$

Последнее соотношение получается из рассмотрения напряженного состояния элемента жидкости, если учесть, что на боковой поверхности струи отсутствуют внешние нагрузки, а деформация жидкого элемента представляет собой в первом приближении одноосное растяжение.

Уравнения (1.11) и (1.12) представляют собой несколько модифицированный вариант очевидных квазиодномерных уравнений струи, использовавшихся в ряде работ (см., например, В. Г. Левич [1], S. Kase и T. Matsuo [1], M. A. Matovich и J. R. A. Pearson [1], H. C. Lee [1]. Модификация, введенная, по-видимому, в работах В. М. Ентова и А. Л. Ярина [1, 2], В. М. Ентова, В. И. Кордонского, В. А. Кузьмина, З. П. Шульмана и А. Л. Ярина [1] и В. М. Ентова [5], состоит в сохранении полного нелинейного выражения для капиллярного давления, что позволяет описывать капиллярный распад вплоть до образования капель. Система квазиодномерных уравнений для струи идеальной жидкости, приведенная в работе М. Zak'a [1], неверна. Отметим, что имеется также ряд работ, в которых решения трехмерных уравнений строятся как асимптотики по малому параметру — толщине струи, отнесенной к характерному продольному масштабу (J. Geer [1])).

Квазиодномерное описание должно быть тем более точным, чем медленнее меняются вдоль струи ее радиус и скорость. Поэтому неудивительно, что исследование устойчивости цилиндрической струи по отношению к малым возмущениям с использованием (1.11) и (1.12) ведет к характеристическому уравнению (1.6), полученному в работе С. Weber'a [1] для длинноволновых возмущений из точного характеристического уравнения трехмерной задачи. Характеристическое уравнение для случая пространственной неустойчивости полубесконечной капиллярной струи идеальной жидкости, найденное в работе W. T. Pimbley [1] с использованием (1.11) и (1.12)

$$\beta^2 (\omega_1 - \chi)^2 = \frac{1}{2} (\chi^2 - 1) \chi^2, \quad (1.13)$$

дает близкие к точному уравнению (1.8) результаты.

В работах А. Е. Green'a и N. Laws'a [1], А. Е. Green'a [1] и Р. М. Naghdi [1] была развита теория, рассматривающая струю капельной жидкости как оснащенную линию. Окончательные квазиодномерные уравнения для струи ньютоновской вязкой жидкости с прямолинейной осью, полученные в этих работах, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial V f}{\partial x} &= 0, \quad f = \pi a^2, \\ \rho f \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) &= - \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{2\pi a \alpha}{\sqrt{1 + (\partial a / \partial x)^2}} \right] + 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left( f \frac{\partial V}{\partial x} \right), \\ &- \frac{1}{8} \rho \frac{f^2}{\pi} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} + V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] = \\ &= q - \left\{ \frac{\pi a \alpha}{\sqrt{1 + (\partial a / \partial x)^2}} - \frac{f \alpha \partial^2 a / \partial x^2}{[1 + (\partial a / \partial x)^2]^{3/2}} \right\} - \\ &- \frac{1}{8} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( f \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) + \mu f \frac{\partial V}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

После отбрасывания ряда малых членов уравнения (1.14) могут быть сведены к (1.11) и (1.12). Как указано D. В. Vogu [1], дополнительные члены в уравнениях (1.14) моделируют радиальные инерционные эффекты, не учитываемые уравнениями (1.11) и (1.12). Б. М. Хусид [1], используя вариационный принцип Даламбера—Лагранжа, вывел систему квазиодномерных уравнений, сводящихся для капиллярной струи вязкой ньютоновской жидкости к (1.14). D. В. Vogu [1] и D. А. Caulk и Р. М. Naghdi [2] получили на основе (1.14) характеристические уравнения для осесимметричных возмущений бесконечной струи вязкой жидкости и полубесконечной струи идеальной жидкости, имеющие, соответственно, вид

$$\begin{aligned} \frac{i\omega a_0}{\alpha} &= - \frac{Z(24\chi^2 + \chi^4)}{2(8 + \chi^2)} \pm \sqrt{Z^2 \left[ \frac{24\chi^2 + \chi^4}{2(8 + \chi^2)} \right]^2 + Z \cdot \frac{4(1 - \chi^2)\chi^2}{8 + \chi^2}}, \\ \beta^2 (\omega_1 - \chi)^2 &= \frac{4(\chi^2 - 1)\chi^2}{8 + \chi^2}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

В естественной («длинноволновой») области применимости квазиодномерного описания, полагая  $\chi^2/8 \ll 1$ , получим из (1.15) приведенные выше соотношения (1.7) и (1.13), соответственно.

Таким образом, в линейных задачах о капиллярном распаде тонких свободных струй квазиодномерный подход позволяет просто получить результаты, практически совпадающие с полученными на основе трехмерных уравнений гидромеханики. Это служит дополнительным аргументом в пользу применения его к анализу более сложных задач, с трудом поддающихся или вовсе не поддающихся точному описанию, в частности к рассмотрению нелинейных эффектов.



#### § 4. Нелинейная стадия капиллярного распада. Образование капель-сателлитов

Хотя линейная теория распада Релея—Вебера, построенная на экстраполяции результатов по начальной стадии роста возмущений вплоть до разрыва струи, удовлетворительно предсказывает время распада, она не позволяет описать форму поверхности струи на поздних стадиях эволюции возмущений и, как следствие — размеры всех образующихся капель. В эксперименте даже при стабилизированном внешнем периодическом возмущением распада наряду с основной каплей, как правило, наблюдается мелкая капля-«сателлит» — остаток распавшейся перемычки между двумя крупными каплями (Е. F. Goedde и М. С. Yuen [1], Р. Lafrance и R. C. Ritter [1], W. T. Pimbley и Н. С. Lee [1], В. Scarlett и С. S. Parkin [1], Б. Г. Холин, Р. Б. Сегаль и Ю. Ф. Гайсинский [1]). Линейная теория, очевидно, предсказывает образование лишь крупных капель с объемом, равным объему струи на длине волны наиболее опасного возмущения. Характер распада струи, помимо чисто научного интереса, существен для ряда приложений, и потому имеется достаточно много работ, посвященных анализу предраспадных стадий динамики струи в рамках нелинейной теории. Как правило, аналитическое исследование проводится при помощи методов деформированных координат и многих масштабов на основе либо полных трехмерных уравнений (М. Yuen [1], А. Н. Nayfeh [1], А. Н. Nayfeh и S. D. Hassan [1], Т. Kakutani, Y. Inoue и Т. Kan [1], Р. Lafrance [1, 2]), либо квазиодномерных уравнений типа (1.11), (1.12) и (1.14), (W. T. Pimbley и Н. С. Lee [1], D. В. Vogy [3—5]), либо на основе уравнений типа уравнений пограничного слоя (М. П. Маркова и В. Я. Шкадов [1], В. Я. Шкадов [1, 2]). Исследовались как временная неустойчивость бесконечной струи, так и пространственная неустойчивость полубесконечной.

К настоящему времени с помощью асимптотических решений удалось сравнительно точно теоретически предсказать размер сателлитных капель (Р. Lafrance [1, 2]) и качественно описать (W. T. Pimbley и Н. С. Lee [1], D. В. Vogy [4, 5]) некоторые закономерности нелинейного распада струй, наблюдавшиеся экспериментально в работе W. T. Pimbley и Н. С. Lee [1] и состоящие в следующем. При малых начальных амплитудах возмущения  $\delta_0$  независимо от длины волны сателлитная капля не полностью отрывается от движущейся вслед за ней крупной капли и в дальнейшем сливается с последней. С ростом  $\delta_0$  возникает ситуация, когда сателлитные капли расположены симметрично по отношению к крупным и не сливаются с ними. При больших значениях  $\delta_0$  капля-сателлит сливается с движущейся перед ней крупной каплей. Наконец, при еще больших значениях  $\delta_0$  сателлитные капли не образуются. Воз-

возможность предсказания закономерностей нелинейного распада чрезвычайно важна при проектировании струйных печатающих устройств, в которых допустима только последняя из вышеупомянутых ситуаций (D. В. Vogу [1, 2]).

Количественная проверка асимптотической теории нарастания отдельных мод возмущения на нелинейной стадии стала возможна с появлением электронно-оптического метода непрерывного бесконтактного измерения радиуса струи, предложенного в работе Н. Н. Тауб'а [1] (см. также работы В. М. Ентова, В. И. Кордонского, В. А. Кузьмина, З. П. Шульмана и А. Л. Ярина [1, 2]). Результаты измерений, выполненных на струях воды радиусом  $1.5 \cdot 10^{-5}$  м, оказались в разумном согласии с теорией М. С. Уен'а [1].

Значительный интерес представляет идея об управлении нелинейными эффектами путем перекачки энергии от наиболее быстро растущей моды к моде с вдвое большей длиной волны. К. С. Chaudhary и L. G. Redekopp [1] развили асимптотическую теорию, удовлетворительно описывающую экспериментальные данные К. С. Chaudhary и Т. Maxworthy [1, 2], которые дают количественные характеристики такого процесса перекачки энергии.

Несколько особняком стоит работа А. А. Новикова [1], который предложил метод сведения квазиодномерной задачи о малых, но конечных возмущениях капиллярной струи к одному уравнению с квадратичной нелинейностью. Это уравнение (модифицированное уравнение Бюргерса) позволяет дать простую качественную трактовку нелинейных взаимодействий: мод и предсказывает эволюцию поверхности струи к системе почти сферических капель, соединенных жидкими нитями.

Полного теоретического описания наблюдаемой в экспериментах нелинейной картины до настоящего времени не получено.

Асимптотические решения, количественно описывающие нелинейные явления при капиллярном распаде струй, весьма громоздки, хотя построены лишь для простейшего случая идеальной жидкости. Поэтому в течение последнего десятилетия интенсивно развивались численные методы исследования распада струй. Так, Н. С. Lee [1] численно решил квазиодномерные уравнения для идеальной жидкости ( $\mu=0$ ) и получил распад струи на основную и сателлитную капли. Исследование нелинейной стадии капиллярного распада струй маловязких жидкостей в рамках квазиодномерной теории не вполне законно, так как на поздней стадии распада должна быть существенна неоднородность течения внутри основной капли. Более точные результаты для нелинейной стадии капиллярного распада струй маловязких жидкостей можно получить с помощью численных расчетов на основе трехмерных уравнений гидромеханики. Л. В. Филянд [2] выполнила такие расчеты с использо-

ванием метода Галёркина, исследовав влияние длины волны и вида начального возмущения на процесс образования сателлитных капель и проследив рост отдельных мод. Для достаточно вязких жидкостей распад носит «длинноволновый» характер и использование квазиодномерного подхода является более оправданным. В работе В. М. Ентова, В. И. Кордонского, В. А. Кузьмина, З. П. Шульмана и А. Л. Ярина [1] изучено влияние числа Онезорге на эволюцию поверхности и характер распада тонких струй высоковязких жидкостей. Начальное возмущение поверхности задавалось в виде гармонической функции с малой амплитудой и длиной волны, отвечающей наиболее опасному в линейном приближении возмущению. С ростом вязкости (числа Онезорге) основная капля становится к моменту распада все более вытянутой, а объем, приходящийся на каплю-сателлит, уменьшается (см. рис. 4). Расчетное время

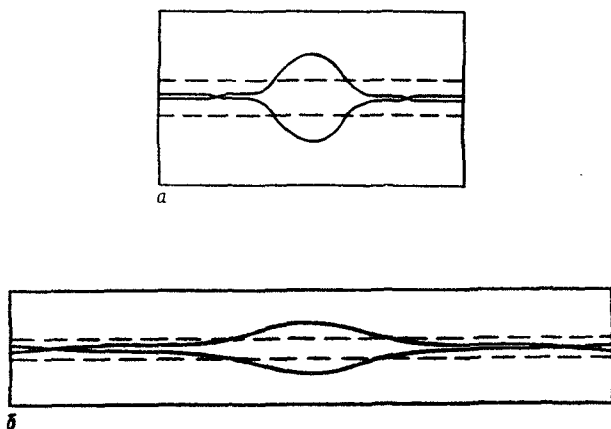


Рис. 4. Влияние числа Онезорге на распад струй вязких ньютоновских жидкостей:

*а* — струя глицерина,  $Z=1.755$ ; *б* — струя касторового масла  $Z=370.3$   
(В. М. Ентов, В. И. Кордонский, В. А. Кузьмин, З. П. Шульман и А. Л. Ярин [1])

до распада разумным образом согласуется с наблюдаемым в эксперименте. D. В. Vogу, S. J. Shine и F. E. Talke [1] на основе квазиодномерных уравнений (1.14) провели расчеты капиллярного распада струй идеальных и вязких жидкостей, вытекающих из насадка (в отличие от упомянутых ранее работ, в которых невозмущенная струя предполагалась бесконечной). Этот расчет дал удовлетворительное совпадение с асимптотическими результатами D. В. Vogу [4, 5], однако не удалось получить полного совпадения с экспериментально наблюдаемой картиной распада во всем диапазоне амплитуд начальных возмущений  $\delta_0$ .

**§ 5. Влияние динамического действия окружающей среды, формы насадка, закрутки, электрического и магнитного полей и эффектов, связанных с тепло- и массопереносом.**

**Распад жидких капель и нитей**

Динамическое действие окружающего воздуха на растущие осесимметричные возмущения капиллярной струи сводится в основном к увеличению давления на сужения поверхности струи и к уменьшению давления на выпуклости и, следовательно, к ускорению распада на капли. Если считать движение воздуха относительно струи потенциальным, в правой части характеристического уравнения (1.5) появляется дополнительно член  $-(\rho_1 V_0^2 / 2\rho a_0^2) \chi^3 (K_0(\chi) / K_0'(\chi))$  ( $\rho_1$  — плотность воздуха), ведущий к увеличению инкремента с ростом  $V_0$  (С. Weber [1]). Расчеты, выполненные с помощью такого уравнения в работах R. P. Grant'a и S. Middleman'a [1], R. E. Phinney [2] и A. M. Sterling'a и C. A. Sleicher'a [1], показали, что с ростом  $V_0$  волновое число  $\chi$ , отвечающее наиболее быстро растущему возмущению, превосходит единицу. Последнее указывает на неприменимость в данном случае длинноволнового приближения типа (1.6). По вычисленным значениям инкремента с использованием (1.4) были получены зависимости  $L=L(V_0)$ , имеющие максимум. Однако количественно описать результаты экспериментов вблизи точки максимума  $D$  (см. рис. 2) не удалось: значения  $L$ , рассчитанные теоретически, оказались существенно меньше экспериментальных. Таким образом, теория, в которой обтекание воздухом осесимметрично возмущенной струи считается потенциальным, давая качественно верные результаты, переоценивает динамическое действие воздуха. По-видимому, вязкость окружающего воздуха сглаживает линии тока и уменьшает возмущения давления вокруг струи. A. M. Sterling и C. A. Sleicher [1] предложили учесть это обстоятельство, домножив в характеристическом уравнении член, выражающий динамическое действие воздуха, на эмпирическую константу, меньшую единицу. Взяв значение этой постоянной равным 0.175, они теоретически описали зависимости  $L=L(V_0)$ , полученные для струй достаточно вязких жидкостей в их экспериментах, а также в работе R. W. Fenn'a и S. Middleman'a [1]. Таким образом, для струй достаточно вязких жидкостей (переход к турбулентному режиму течения в которых затягивается) максимум на кривой  $L=L(V_0)$  обусловлен динамическим действием воздуха на осесимметричные капиллярные возмущения, а дальнейшее падение длины струи с ростом  $V_0$  связано с появлением растущих изгибных возмущений (см. § 1 главы 3). У струй маловязких жидкостей максимум на кривой  $L=L(V_0)$  связан с переходом к турбулентному режиму течения (см. § 3 главы 3). Влияние динамического действия окружающего воздуха на капиллярный распад струй (в том числе на его нелинейную ста-

дию, размер и форму сателлитных капель) исследовано Л. В. Филянд [1, 2].

Капиллярный распад струй жидкости, движущихся в другой жидкости, качественно подобен распаду в воздухе. Поэтому для теоретических (S. Tomotika [1], T. Mikami и S. G. Mason [1], W. K. Lee и R. W. Flumerfelt [1]) и экспериментальных (A. H. P. Skelland и K. R. Johnson [1], A. Assenov, I. Penchev и S. Radev [1], A. H. P. Skelland и Y. F. Huang [2] и Y. Kitamura, H. Mishima и T. Takahashi [1]) работ в этой области характерно использование представлений и аппарата теории Релея—Вебера. Однако заметное влияние вязкости окружающей жидкости, ведущее, в частности, к неоднородности течения в струе, в ряде случаев требует усложнения теории для получения количественного совпадения с экспериментом.

Из общих соображений следует, что начальный уровень возмущений, а следовательно — и длина струи до распада, должны зависеть от геометрии насадка. Однако эксперименты J. Isiek'a [1] показали, что в определенном диапазоне относительных удлинений насадка с круглым выходным сечением его внутренняя геометрия не влияет на капиллярный распад ламинарных струй, движущихся в воздухе. Это является следствием быстрой релаксации начального профиля скорости в струе (см. § 1 данной главы). Однако, как следует из этих же экспериментов, длина струи до распада существенно зависит от геометрии насадка, если она влияет на переход к турбулентному режиму течения.

Для струй маловязких жидкостей, истекающих из некруглых отверстий, характерна длительная перестройка основного, невозмущенного течения, связанная с конкуренцией инерционных и поверхностных сил. Так, сечение струи идеальной жидкости, истекающей из эллиптического отверстия, сжимаясь вдоль большой оси, превращается в круг, а затем в эллипс, вытянутый вдоль перпендикулярной оси (G. Taylor [5], A. E. Green [2], J. F. Geer и J. C. Strikwerda [1]). Такая перестройка может многократно повторяться вдоль оси струи. Численное моделирование и упрощенные аналитические модели позволяют решать и более сложные задачи, например, исследовать эволюцию формы струй, истекающих из квадратного и прямоугольного отверстий (В. И. Бабкин, С. М. Белоцерковский и В. В. Гуляев [1], M. S. Vorgas и E. O. Tuck [1]). Устойчивость и распад на капли жидких струй, истекающих из некруглых отверстий, исследовали С. Я. Герценштейн и В. Я. Шкадов [1], В. Я. Шкадов [1] и Л. В. Филянд [2]. Форму сечения и распад на капли жидкого цилиндра, движущегося в воздухе по нормали к своей оси изучали D. Weihs и I. Frankel [1]. По-видимому, даже значительные искажения формы сечения не оказывают большого влияния на основную (осесимметричную) моду распада струи. Так, в быстродействующих струйных печатаю-

щих устройствах для получения калиброванных тонких струй используются отверстия квадратной формы, полученные травлением (L. Kuhn и R. A. Myers [1]).

Дестабилизирующее влияние осевой закрутки струи на устойчивость и распад в последние годы исследовалось в работах С. Я. Герценштейна, Л. В. Филянд и В. Я. Шкадова [1], D. A. Caulk'a и P. M. Naghdi [1], Л. В. Филянд [2] и В. Е. Елихина и В. Я. Шкадова [2]. J. Martinon [1] показал, что вращение окружающей струю среды способствует росту неосесимметричных капиллярных возмущений, ведущему к распаду струи.

С. Н. Hertz и В. Herganrud [1] исследовали особенности капиллярного распада жидкой струи, окруженной коаксиальной кольцевой струей другой жидкости.

Широкое применение струй капельных жидкостей в технологических процессах потребовало учета при их теоретическом и экспериментальном исследовании таких факторов как электризация жидкости, влияние внешних полей: электрического (Rayleigh [1], S. Chandrasekhar [1], L. Garmendia [1], L. A. Garmendia и I. K. Smith [1], A. L. Huebner и H. N. Chu [1], Y. Tomita, K. Sudou и Y. Ishibashi [1], А. Ф. Колесниченко [1], A. G. Bailey и W. Balachandran [1]) и магнитного (S. Chandrasekhar [1], Ю. М. Гельфгат, С. В. Ольшанский и Г. А. Явнайст [1], Н. Г. Тактаров [1], В. Г. Баштовой и М. С. Краков [1], С. И. Мартынов и Н. Г. Тактаров [1, 2], А. Ф. Колесниченко [1] и Y. Tomita, K. Sudou и Y. Ishibashi [1]).

G. I. Taylor [6, 7] экспериментально показал, что поверхность жидкого диэлектрика, помещенная в электрическое поле между обкладками конденсатора, неустойчива: при некоторой достаточно большой напряженности поля на ней образуются один или несколько конических выступов. Дальнейшее увеличение поля приводит к формированию тонкой заряженной струйки, бьющей из вершины конического выступа в направлении противоположной обкладки конденсатора. В работе G. I. Taylor'a [7] получено характеристическое уравнение, описывающее дестабилизирующее влияние электрического поля на осесимметричные капиллярные возмущения таких струй с волновым числом  $\chi > 0.6$  и стабилизирующее — при  $\chi < 0.6$ . Физический смысл этого результата не выяснен. Кроме того, предсказание невозможности стабилизировать струю ни при каких величинах заряда при  $\chi > 0.6$  находится в противоречии с результатами эксперимента, где даже слабого заряда достаточно для стабилизации струи воды ( $\chi \approx 0.7$ ). Если использовать магнитодиэлектрическую жидкость, как это было сделано в работах В. М. Кожевникова, В. В. Чеканова и Е. И. Янтовского [1] и В. М. Кожевникова [1], то конические выступы на жидкой поверхности можно создать с помощью магнитного поля. После этого, прикладывая электрическое поле, можно получить тонкие струйки, подобные наблюдавшимся в экспериментах G. I. Taylor'a [6, 7].

Тангенциальное к поверхности струи однородное магнитное поле оказывает стабилизирующее действие на ее распад, а нормальное поле — дестабилизирующее (Н. Г. Тактаров [1], В. Г. Баштовой и М. С. Краков [1]).

Еще одним фактором, влияющим на рост возмущений, является тепло- и массоперенос на поверхности струи. В этом случае проявляется еще один механизм, влияющий на устойчивость струи — генерация вихрей в расходящемся потоке продуктов химической реакции или нагретого газа с поверхности (А. Л. Ярин [1]). Количественно этот эффект обычно невелик. Связанное с массопереносом на поверхности струи изменение концентрации растворенного газа и поверхностно-активных веществ (эффект Марангони) может оказывать заметное влияние на течение в струе и ее устойчивость (Н. С. Burgckholder и J. C. Berg [1], J. T. Davies и R. W. Makepeace [1], Л. М. Рабинович [1], L. E. Tarr и J. C. Berg [1], R. W. Coyle, J. C. Berg и J. C. Niwa [1], N. K. Nelson и J. C. Berg [1]).

Изучая эволюцию и распад капель, увлекаемых расходящимся («гиперболическим») потоком несущей среды, G. I. Taylor [1] обнаружил, что при определенных условиях капли вытягиваются, не распадаясь, в очень тонкие нити, причем при остановке растяжения происходит весьма быстрый распад нити на множество мелких капель. (По-видимому, это явление играет важную роль в процессе перемешивания вязких систем). Тем самым была обнаружена «гиперустойчивость» растягиваемых струй. Последующие теоретические исследования устойчивости и распада цилиндрических жидких тел, подвергаемых продольному растяжению (невозмущенное состояние нестационарно; S. Tomotika [2] и T. Mikami, R. G. Cox и S. G. Mason [1]), показали, что растяжение стабилизирует нити ньютоновской жидкости по отношению к малым возмущениям. Этим и объясняется длительное существование тонких жидких нитей, полученных при растяжении капли, наблюдавшееся в экспериментах G. I. Taylor'a [1]. Теоретические результаты линейного анализа удовлетворительно соответствуют данным современных экспериментов (T. Mikami, R. G. Cox и S. G. Mason [1]).

## Глава 2

### КАПИЛЛЯРНЫЙ РАСПАД ТОНКИХ СВОБОДНЫХ СТРУЙ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Реологические особенности жидкости могут существенно повлиять на характер распада струи, время до распада и длину сплошной части струи. При этом обнаруживаются не только неожиданно большие количественные, но и качественные эф-

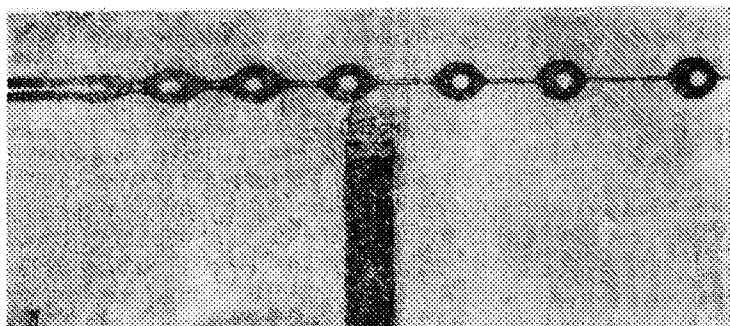
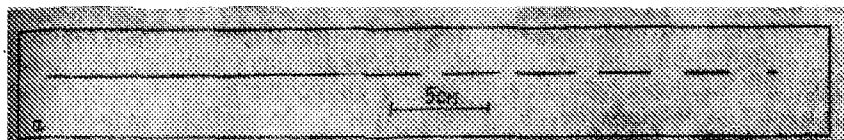


Рис. 5. Капиллярный распад струй неьютоновских жидкостей:

*a* — суспензия 25%  $\gamma$   $\text{Fe}_2\text{O}_3$  (В. М. Ентов, В. И. Кордонский, В. А. Кузьмин, З. П. Шульман и А. Л. Ярин [1, 2]); *б*) — четочная структура капиллярной струи 0,1%-ного раствора полиоксизтилена (ПОЭ) WSR-301 в воде (А. В. Базилевский, С. И. Воронков, В. М. Ентов и А. Н. Рожков [2])

фекты, в частности, появление новых форм распада (см. рис. 5). Данная глава посвящена рассмотрению экспериментальных и теоретических работ, касающихся этих вопросов.\*

## § 1. Распад струй нелинейно-вязких жидкостей

Сравнительно просто удается исследовать распад струй нелинейно-вязких жидкостей, т. е. жидкостей с нелинейной связью между напряжениями и деформациями, не проявляющих упругих или временных свойств. Ниже рассматриваются так называемые степенные жидкости, для которых справедливо степенное реологическое соотношение

$$\tau = 2K [2S_p (D^2)]^{\frac{n-1}{2}} D \quad (2.1)$$

Здесь  $\tau$  и  $D$  — девиатор тензора напряжений и тензор скоростей деформации,  $K$  и  $n$  — реологические константы жидко-

\* В период завершения работы над данным обзором вышла из печати книга З. П. Шульмана и Б. М. Хусида [3], в которой имеется обширный раздел, посвященный динамике струй реологически сложных жидкостей, суммирующий и развивающий предыдущие статьи указанных авторов, разбираемые в данном обзоре. В частности, в этой книге подробно изложен вывод квазиодномерных уравнений из варнационного принципа Даламбера—Лангранжа и ряд принадлежащих авторам результатов. Соответствующий раздел указанной книги может быть рекомендован как полезное дополнение к главам 2 и 3 данного обзора.



сти. При  $0 < n < 1$  жидкость является псевдопластической, при  $n > 1$  — дилатантной, случай  $n = 1$  ( $K = \mu$ ) отвечает ньютоновской линейно-вязкой жидкости. Условная вязкость псевдопластической жидкости падает с ростом скорости деформации, дилатантной — возрастает. Типичными псевдопластическими жидкостями являются суспензии; дилатантные жидкости достаточно редки, хотя в ряде случаев поведение упругих жидкостей внешне близко к дилатантному.

Распад движущихся в воздухе капиллярных струй суспензий глины в воде и  $\gamma$ -оксида железа в масле экспериментально исследован в работе В. М. Ентова, В. И. Кордонского, В. А. Кузьмина, З. П. Шульмана и А. Л. Ярина [1, 2]. (Струи, движущиеся в жидкой среде исследованы Y. Kitamura и T. Takahashi [1]). Начальные возмущения задавались путем периодического (с частотой 250 Гц) прикосновения к поверхности струи иглой. На струях вязкой жидкости это приводило к регулярной картине распада на капли; струи достаточно концентрированных суспензий распадались на характерные «столбики» с длиной, заданной начальным возмущением (см. рис. 5, а), сокращающиеся в полете под действием капиллярных сил.

Теоретическое исследование капиллярного распада струй нелинейно-вязких жидкостей, выполненное в упомянутых работах, позволило выяснить природу наблюдаемых особенностей распада струй суспензий. Для степенной жидкости система уравнений квазиодномерного приближения имеет вид (1.11), причем замыкающее соотношение для напряжений принимает форму

$$\sigma_{xx} = 3^{\frac{n+1}{2}} K \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right|^{n-1} \frac{\partial V}{\partial x} - \alpha \left\{ \frac{1}{aV \sqrt{1 + (\partial a / \partial x)^2}} - \frac{\partial^2 a / \partial x^2}{[1 + (\partial a / \partial x)^2]^{3/2}} \right\}, \quad (2.2)$$

служащую обобщением (1.12). Система (1.11), (2.2) интегрировалась численно в предположении, что возмущения периодичны по длине струи (т. е. исследовалась временная неустойчивость). Проведенные расчеты показали, что для выраженных псевдопластических жидкостей (с показателем  $n$  значительно меньшим 1) время и форма распада сильно зависят от амплитуды и характера начального возмущения. В частности, при возмущении в виде локализованного на небольшой длине вдавливания поверхности, имитирующем прикосновение иглы, последующая эволюция формы струи сводится к локализованному прогрессирующему сужению в месте возмущения, и струя распадается на «столбики» (см. рис. 6; врезка в нижнем левом углу рис. 6, б показывает в безразмерных переменных изменение во времени радиуса в сечении, где струя разрывается). Объясняется это тем, что заметная скорость деформации создается лишь в местах пережатия струи. При псевдопластическом по-

ведении жидкости это приводит к уменьшению ее эффективной вязкости в местах сужения, а это, в свою очередь, после некоторого периода задержки, связанного с развитием течения в сужениях, ведет к быстрому локализованному прогрессирующему сужению. Длительность периода задержки зависит от амплитуды  $\delta_0$  начального возмущения и для значений показателя

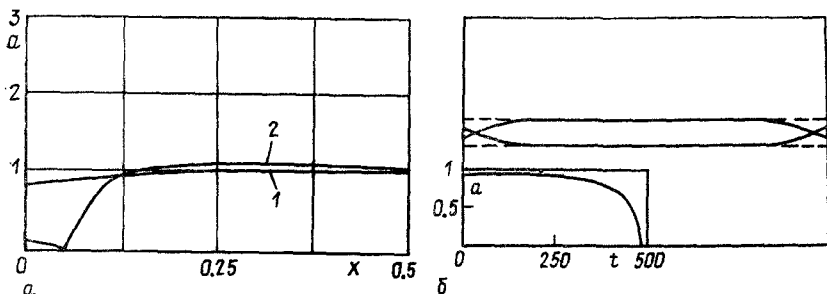


Рис. 6. Результаты расчета капиллярного распада струи псевдопластической жидкости «умеренной» вязкости ( $K/\rho=8.18 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^{1.5}$ ,  $\alpha/\rho=34.7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}^2$ ,  $n=0.5$ ,  $a_0=0.06 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $l=1.98 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ):

$a$  — эволюция поверхности струи, отвечающей одной полуволне (радиус отнесен к  $a_0$ , продольная координата — к длине волны возмущения  $l$ , время — к  $T=0.229 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ ),  $1-t=300$ ,  $2-t=479.05$ ; б — форма жидких объемов, образующихся в момент распада струи. (В. М. Ентов, В. И. Кордонский, В. А. Кузьмин, З. П. Шульман и А. Л. Ярин [1, 2])

степени  $n$ , существенно меньших единицы, может быть очень большой для относительно малых начальных возмущений (малые начальные скорости деформаций в сужениях и, следовательно, большие эффективные значения вязкости). Это может резко затян timer продолжительность распада струи в целом. С другой стороны, для относительно больших начальных возмущений, ведущих к большим начальным скоростям деформации и малым значениям эффективной вязкости, время задержки может быть очень мало, а распад струи в целом происходит очень быстро.

Указанные особенности выражены тем сильнее, чем «более псевдопластической» является жидкость, и потому наиболее ярко проявляются в опытах с достаточно концентрированными суспензиями, однако их можно проследить и в экспериментах с гелеобразными полимерными растворами (например, M. Goldin, R. Pfeffer и R. Shinnar [1]). В этой работе исследовано также влияние тиксотропного разрушения структуры жидкости на капиллярный распад.

По контрасту ясно, что для дилатантных жидкостей должна иметь место повышенная стабильность материала в сужениях и замедление распада на поздних стадиях. Это полностью подтверждается расчетом. Сравнительно быстрый рост начального возмущения приводит к увеличению эффективной вязкости в сужениях струи и к превращению ее в систему практически сферических капель, соединенных тонкими нитями. Результаты расчетов представлены на рис. 7: эволюция поверх-

ности струи со временем показана на рис. 7, а, форма струи в момент распада — на рис. 7, б. На врезке в нижнем левом углу рис. 7, б в безразмерных переменных показано изменение со временем радиуса в сечении струи, в котором в конечном счете происходит ее разрыв. Характерно замедление поздней стадии распада, когда достигаются значительные скорости деформации в нитях, соединяющих капли и, соответственно, «упрочнение» жидкости в нитях. При этом расчеты велись в безынерционном приближении (результаты показаны пунктиром на рис. 7, а, как в случае «очень вязких» ньютоновских и псевдопластических жидкостей).

Сравнение результатов расчетов капиллярного распада струй ньютоновской (рис. 4), псевдопластической (рис. 6, б) и дилатантной (рис. 7, б) жидкостей подчеркивает сильное влия-

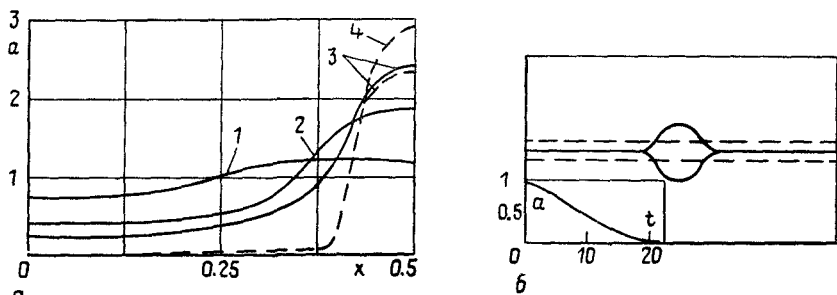


Рис. 7. Капиллярный распад струи дилатантной жидкости ( $K/\rho=9.43 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^{0.5}$ ,  $\alpha/\rho=34.7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}^2$ ,  $n=1.5$ ,  $a_0=0.06 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $l=1.98 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ):

$a$  — поверхность струи, соответствующая одной полуволне (радиус отнесен к  $a_0$ , продольная координата — к длине волны возмущения  $l$ , время — к  $T=6.08 \cdot 10^{-2} \text{ с}$ ),  $1-t=5$ ,  $2-t=10$ ,  $3-t=13$ ,  $4-t=21.85$ ; б — форма струи в момент распада

ние реологических свойств как на форму образующихся капель, так и на время распада. Для систем с выраженной дилатансией (в отличие от струй псевдопластических жидкостей, распад которых всецело определяется формой и величиной начальных возмущений) характерен сравнительно быстрый переход к квазистационарной стадии эволюции с образованием четочной структуры почти сферических капель. При этом начальным возмущением определяется лишь расстояние между каплями (и, следовательно, их объем), но не форма распада и время сохранения сплошности струи. Оценка времени утоньшения до распада нитей в четочной структуре струи дилатантной жидкости получена в работах В. М. Ентова, В. И. Кордонского, В. А. Кузьмина, З. П. Шульмана и А. Л. Ярина [1, 2] и имеет вид

$$T_1 = 2n \left( 3 \frac{n+1}{2} \alpha^{-1} K a_0 \right)^{1/n}. \quad (2.3)$$

Заметим, что ввиду отсутствия реальных дилатантных нелинейно-вязких жидкостей, эта оценка имеет смысл лишь как

качественная модель поведения более сложных упруговязких жидкостей (см. ниже).

Укажем еще работы З. П. Шульмана и Б. М. Хусида [2, 3] и Б. М. Хусида [3], в которых квазиодномерные уравнения в безынерционном приближении используются для качественно-го анализа эволюции капиллярных струй реологически сложных жидкостей.

## § 2. Струи упруговязких жидкостей — экспериментальные исследования

Ряду жидкостей, прежде всего растворам полимеров, присущи «эффекты памяти» — вязкоупругое поведение. Принципиальное значение имеют экспериментальные исследования капиллярного распада струй разбавленных растворов полимеров, которые выполнили М. Goldin, J. Yerushalmi, R. Pfeffer и R. Shinnar [1]. В их опытах капиллярные возмущения начинают расти как и на струях чистого растворителя, однако в дальнейшем этот рост замедляется, струя превращается в четочную структуру — систему капель, соединенных тонкими нитями (см. рис. 5, б). Эта структура оказывается удивительно долгоживущей, вследствие чего резко увеличивается длина струи до распада по сравнению с сопоставимой струей чистого растворителя (практически с теми же значениями  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $a_0$ ,  $V_0$ ). Увеличение концентрации раствора полимера приводит к подавлению быстрого роста возмущений после выхода струи из насадка (струя в этом случае представляет собой гладкий цилиндр). Лишь на значительном расстоянии от среза насадка на струе появляются заметные осесимметричные возмущения. Эту картину подтвердили своими экспериментами Н. Rubin и М. Wharshavsky [1], М. Gordon, J. Yerushalmi и R. Shinnar [1] и А. В. Базилевский, С. И. Воронков, В. М. Ентов и А. Н. Рожков [2] и лишь более ранняя работа Ф. В. Kroesser'a и S. Middleman'a [1] не согласуется с ней. В настоящее время факт образования четочной структуры и резкого замедления поздней стадии капиллярного распада струй вязкоупругих жидкостей надежно установлен.

Довольно быстро утвердилось мнение, что одной из причин повышенной устойчивости струй вязкоупругих жидкостей является заметное продольное натяжение, возникающее при течении жидкости в насадке и не успевающее полностью релаксировать за время капиллярного распада. Физической причиной появления продольных упругих напряжений в струе, выходящей из насадка, является преимущественное растяжение макромолекул по потоку в сходящемся течении в насадке. Сам факт наличия этих напряжений установлен в настоящее время достаточно четко при помощи ряда прямых и косвенных методов. (Преобладание косвенных методов объясняется тем, что-

речь идет об измерении малых сил на подвижном и не полностью стабильном объекте — струе). Первые измерения продольных напряжений в струях вязкоупругих жидкостей были проведены на основе метода работы S. Gogen'a и J. Gavis'a [1] с помощью наблюдений за распространением вдоль струй изгибных возмущений, создаваемых поперечной вибрацией насадка. Некоторые детали этой работы рассмотрены далее в § 1 главы 3.

Для достаточно концентрированных растворов наличие заметных упругих напряжений может быть эффектно продемонстрировано фактом существования стационарной искривленной струи (В. М. Ентов, С. М. Махкамов и К. В. Мукук [1], В. М. Ентов [2]); элементарные уравнения баланса импульса позволяют рассчитать напряжение в струе, зная лишь расход жидкости, форму оси струи и закон изменения радиуса струи по ее длине (т. е. имея лишь фотографию струи).

В принципе из уравнения баланса импульса можно, зная суммарный импульс струи, расход жидкости в ней и зависимость ее радиуса от расстояния от насадка, найти распределение напряжений по длине струи (В. М. Ентов [4], Н. Usui и Y. Sano [1]). Фактически используется обычно лишь измерение полного импульса струи, как в методе измерения отдачи струи, истекающей из насадка (А. В. Metzner и А. Р. Metzner [1]).

Таким образом, факт наличия упругих напряжений (и притом достаточно больших) в свободных струях можно считать установленным. Заметим, что факт этот не вполне тривиален. Дело в том, что свободная струя «ничем не удерживается» на дальнем конце. Поэтому струя может оставаться натянутой, лишь если информация о разгруженности дальнего конца «не успевает» поступить к насадку — скорость струи больше скорости распространения волн напряжения, струя в определенном смысле является «сверхзвуковой». Если струя медленная, то она оказывается полностью разгруженной. Тогда после выхода из насадка жидкость испытывает упругое восстановление формы, и струя резко утолщается. (Подробное обсуждение вопроса о различии между быстрыми и медленными струями упругих жидкостей см. в работе В. М. Ентова [4]). Это — хорошо известный реологам эффект «разбухания струи».

Само по себе наличие значительных упругих напряжений есть лишь одно из проявлений ориентационной деформации макромолекул в растворе. В ряде случаев измеренные напряжения настолько велики, что речь может идти о своего рода «конформационном фазовом переходе» макромолекулярного клубка в почти вытянутую макромолекулу. Однако это еще не объясняет существа механизма стабилизации струй макромолекулярными добавками. Ряд возможных механизмов обсуждается ниже.

В еще большей мере связано с ориентационным деформированием макромолекул образование четочной структуры на поздней стадии распада. Сам факт «живучести» образующихся тонких нитей (см. рис. 5, б) указывает на необычную сопротивляемость жидкости в них деформированию. Тонкая нить обжигается по радиусу капиллярным давлением, и потому напряженное состояние жидкости в ней эквивалентно осевому растяжению напряжением  $\alpha/a$ . В вязкой жидкости под действием такого напряжения возникает скорость растяжения

$$\dot{\epsilon} = -\frac{2}{\delta} \frac{da}{dt} = \frac{\alpha}{3\mu a} \quad (2.4)$$

Поэтому измерив скорость утоньшения нити  $\dot{a}/a$ , можно найти «эффективную вязкость» жидкости. Реализация этого подхода в работах А. В. Базилевского, С. И. Воронкова, В. М. Ентова и А. Н. Рожкова [1, 2] привела для разбавленных растворов полимеров к значениям эффективной вязкости, на 3—4 порядка превосходящим вязкость растворителя и «обычную» вязкость раствора. Так, для разбавленного (0.02%) раствора полиоксипропилена WSR—301 (ПОЭ) в воде получено значение  $\mu^* = 7$  кг/(м·с), тогда как сдвиговая вязкость раствора  $\sim 3 \cdot 10^{-3}$  кг/(м·с) (см. также Р. Schümmer и К. Н. Tebel [1, 3]).

Эксперименты У. Tomita, Т. Shimbo и У. Ishibashi [1] позволили наблюдать у струй вязкоупругих жидкостей такие явления как регулярное, нерегулярное и автоколебательное расширение струи после выхода из насадка и отклонение ее при движении в электрическом и магнитном поле.

### § 3. Теория капиллярного распада струй вязкоупругих жидкостей

Теоретические исследования капиллярного распада струй вязкоупругих жидкостей некоторое время находились в кажущемся противоречии с экспериментом. Исследование в линейном приближении влияния упругих эффектов на устойчивость струй независимо от вида использованного реологического соотношения приводит к выводу, что возмущения в струе (или нити) вязкоупругой жидкости нарастают быстрее, чем в струе ньютоновской жидкости той же вязкости (М. Goldin, J. Yerushalmi, R. Pfeffer и R. Shinnar [1], F. W. Kroesser и S. Middleman [1], Н. Rubin [1], А. Sagiv, Н. Rubin и R. Takserman-Krozer [1], А. Sagiv и R. Takserman-Krozer [1], А. Л. Ярин [1], S. L. Goren и М. Gottlieb [1], W. K. Lee, K. L. Yu и R. W. Flumerfelt [1]). Причина этого элементарна: в рамках теории малых возмущений, если невозмущенное состояние отвечает покою и отсутствию напряжений, упругие напряжения квадратичны по возмущениям, и потому несут существенны, а роль

упругости сводится лишь к уменьшению эффективной вязкости. Поэтому выход из противоречия можно искать, взяв в качестве невозмущенного состояние покоя при наличии натяжения вдоль струи. Из этих соображений в работах В. М. Ентова [1, 2] с помощью квазиодномерных уравнений была исследована устойчивость предварительно натянутого столба вязкоупругой жидкости. Методом малых возмущений получено, что быстро растущие возмущения, для которых  $\gamma\lambda \gg 1$  ( $\lambda$  — время релаксации) не могут существовать, если начальное продольное натяжение достаточно велико. В рамках рассмотренной реологической модели этому отвечает неравенство

$$3[(\epsilon_0 - 1)\tau_0 + 2\mu/\lambda] > \alpha/a_0. \quad (2.5)$$

Здесь  $\tau_0$  — величина девиаторной части растягивающего напряжения, а  $\epsilon_0$  — число, превосходящее 1 (реологический параметр олдرويدской модели жидкости). При выполнении неравенства (2.5) могут существовать лишь возмущения с временем нарастания порядка  $\lambda$ . Поэтому уже при  $\lambda \sim 10^{-2}$  с видно, что предсказываемое теорией время роста возмущений по крайней мере на порядок превосходит время капиллярного распада соответствующей струи чистого растворителя. Результаты этих работ, предсказывающие гиперустойчивость натянутых струй и нитей вязкоупругих жидкостей были в дальнейшем подтверждены в работах З. П. Шульмана и Б. М. Хусида [1], Б. М. Хусида [2] и S. L. Gogen'a и M. Gottlieb'a [1]. В соответствии с результатами упомянутых работ можно сказать, что быстрый рост осесимметричных капиллярных возмущений возможен лишь после релаксации напряжений, то есть с задержкой порядка времени релаксации  $\lambda$ . Вероятно, этим объясняется длительное отсутствие видимых возмущений на струях полуразбавленных растворов полимеров, отмеченное в работе M. Goldin'a, J. Yerushalmi, R. Pfeffer'a и R. Shinnar'a [1].

В работе В. М. Ентова, В. И. Кордонского, В. А. Кузьмина, З. П. Шульмана и А. Л. Ярина [1] было начато численное исследование капиллярного распада струй вязкоупругих жидкостей. Расчеты, проведенные с использованием феноменологической олдرويدской модели жидкости, подтвердили справедливость неравенства (2.5) как условия гиперустойчивости струи. Результаты численных расчетов показали, что возмущения (их время роста оказалось порядка  $\lambda$ ) представляют собой циклические колебания поверхности струи с медленно растущей амплитудой. Однако четочной структуры в расчетах этой работы получено не было. При этом выяснились принципиальные трудности, связанные с использованием феноменологических реологических моделей в гидродинамических расчетах. Наблюдаемые явления, как уже говорилось выше, связаны с накоплением весьма больших упругих деформаций с сильной ориентацией макромолекул. При экстраполяции на такой большой диапазон

деформаций внешне близкие реологические модели дают существенно различные результаты, и весьма трудно выделить из них физически значимые. Поэтому в дальнейшем предпочтение было отдано молекулярно-гидродинамической модели Хинча, явным образом учитывающей молекулярную структуру раствора и способность макромолекул к большой ориентационной деформации. (Модель Хинча относится к невзаимодействующим макромолекулам — ситуации, характерной для разбавленных растворов полимеров). В квазиодномерном приближении выражение для продольного напряжения в струе принимает вид

$$\sigma_{xx} = 3\mu (1 + 5nr^3K_1) \frac{\partial V}{\partial x} - \alpha \left\{ \frac{1}{a\sqrt{1 + (\partial a/\partial x)^2}} - \frac{\partial^2 a/\partial x^2}{[1 + (\partial a/\partial x)^2]^{3/2}} \right\} + n\kappa K_2 (L_x - L_y). \quad (2.6)$$

Последний член здесь учитывает упругие напряжения, выраженные через компоненты ориентационного тензора  $\mathbf{L}$ . В свою очередь эволюция тензора  $\mathbf{L}$  описывается релаксационными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_y}{\partial t} + V \frac{\partial L_y}{\partial x} &= -K_1 L_y \frac{\partial V}{\partial x} - K_2 K_3 \left( L_y - \frac{r^2}{3} \right), \\ \frac{\partial L_x}{\partial t} + V \frac{\partial L_x}{\partial x} &= 2K_1 L_x \frac{\partial V}{\partial x} - K_2 K_3 \left( L_x - \frac{r^2}{3} \right), \\ K_1 &= \frac{2L_y + L_x}{3r^2 + 2L_y + L_x}, \quad K_2 = \frac{Nb}{Nb - \sqrt{2L_y + L_x}}, \\ K_3 &= \frac{2r}{\lambda \sqrt{2L_y + L_x}}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

в которые в качестве вынуждающего воздействия входят компоненты тензора скоростей деформации  $\mathbf{D}$ . В квазиодномерном описании этот тензор диагонален, причем  $D_x = \partial V/\partial x$ ,  $D_y = -1/2 \partial V/\partial x$ .

В соотношениях (2.6) и (2.7)  $\mu$  — вязкость растворителя,  $n$  — число макромолекул в единице объема раствора,  $b$  — длина сегмента макромолекулы (сегмента Куна),  $N$  — число сегментов в макромолекуле,  $r = b\sqrt{N}$  — размер макромолекулярного клубка,  $\lambda = 6\mu r/\kappa$  — время релаксации жидкости,  $\kappa$  — упругость клубка.

В работе В. М. Ентова и А. Л. Ярина [4] выполнены численные расчеты эволюции возмущений на струе упруговязкой жидкости Хинча в рамках квазиодномерного безынерционного описания. Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 8, где показаны в масштабе последовательные фазы эволюции поверхности отрезка струи, отвечающего одной длине волны возмущения. Безразмерными критериями подобия в задаче о



струе вязкоупругой жидкости являются  $\phi = 4\pi nr^3/3$ ,  $\tau = \mu a_0 / (\alpha \lambda) = \kappa a_0 / (6\pi r a)$  и  $L_0$ . Величина  $\phi$  характеризует степень заполнения жидкого объема макромолекулярными клубками,  $\tau$  — отношение характерного времени вязко-капиллярного распада ко времени релаксации (или отношение начального модуля упругости макромолекулярного клубка к капиллярному давлению).  $L_0$  — начальное значение осевой компоненты  $L_x$  ориентационно-деформационного тензора, характеризующее начальное удлинение макромолекулярных клубков в направлении оси струи. Через эти величины выражается отношение упругой энергии к поверхностной в начальный момент времени  $E_0 = 9\phi\tau L_0/8$ . Данные, отвечающие рис. 8, соответствуют 0.03%

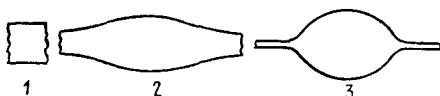


Рис. 8. Возникновение четочной структуры при капиллярном распаде струи вязкоупругой жидкости (модель Хинча) ( $\phi = 0.419$ ,  $\tau = 0.21 \cdot 10^{-2}$ ,  $L_0 = 2.5$ )  
 $1 - t = 0$ ,  $2 - t = 0.37 \cdot 10^{-3}$  с,  $3 - t = 0.56 \cdot 10^{-3} \div 3.04 \cdot 10^{-2}$  с  
 (В. М. Ентов и А. Л. Ярин [4])

раствору ПОЭ в воде; в этом случае  $L_0 = 2.5$ ,  $E_0 = 2.5 \cdot 10^{-3}$ , и влияние упругих эффектов на ранней стадии роста возмущений мало. В дальнейшем, однако, течение растяжения в сужении струи приводит к ориентации макромолекулярных клубков вдоль оси и к их удлинению, достигающему трети от полной длины макромолекулы. Этого оказывается достаточно для столь значительного упрочнения материала в сужениях струи, превратившихся в нити, что истечение из них жидкости в капли резко замедляется, как и эволюция струи в целом. Возникает четочная структура струи. Отметим, что значительное удлинение макромолекулярных клубков в нитях после некоторого периода задержки возникает практически скачком. В численных расчетах четочная структура прослеживалась в практически неизменном виде вплоть до значения времени, в пять раз превосходящего время релаксации жидкости ( $\lambda = 6.15 \cdot 10^{-3}$  с) (момент окончания счета). Если, не меняя прочих параметров, увеличить начальную ориентацию (что равносильно увеличению начального продольного натяжения), положив  $L_0 = 100$  ( $E_0 = 0.1$ ), то упругие напряжения начинают влиять на начальную стадию роста возмущений. Это приводит к появлению периода задержки длительностью  $2.5\lambda$ , в течение которого нет видимого роста возмущений, что соответствует предсказаниям линейной теории. После частичной релаксации продольного напряжения начинается замедленный рост возмущений, ведущий к увеличению натяжения в сужениях струи, растяжению в них макромолекулярных клубков и возникновению четочной структуры. С увели-

чением вязкости растворителя возрастает время релаксации и период задержки роста возмущений. В целом численные расчеты подтверждают стабилизирующую роль упругих напряжений как на начальном участке струи, так и в сужениях четочной структуры.

Поскольку сама четочная структура эволюционирует весьма медленно, она может рассматриваться как последовательность нетривиальных форм равновесия медленно релаксирующего тонкого стержня эластичного материала при наличии поверхностного натяжения. Асимптотический анализ таких форм равновесия в предположении, что материал является неогуковым телом, выполнен в работе В. М. Ентова и А. Л. Ярина [4]. Он показывает, что искомые нетривиальные формы равновесия представляют собой последовательность сферических капель радиуса  $a_0 [3l/(4a_0)]^{1/3}$  ( $l$  — длина волны возмущения), в которых практически нет напряжений, и тонких сильно натянутых нитей радиуса  $a_0 \varepsilon^{1/3} \cdot 2^{-1/3}$ , где  $\varepsilon = 2Ga_0/\alpha$  — отношение начального модуля упругости материала к капиллярному давлению. Устойчивость нитей обеспечивается тем, что при дальнейшем сужении упругая составляющая продольного усилия растет быстрее, чем убывает вклад поверхностного натяжения  $\lambda \alpha a_0$  (В. М. Ентов [2]). Начальная цилиндрическая конфигурация стержня устойчива, если жесткость его достаточно велика  $\sigma_{xx}(t=0) \cdot a_0/a \gg 1$ ; в этом случае нетривиальных форм равновесия нет.

Динамика утоньшения нитей, связывающих капли четочной структуры на заключительной стадии распада струи, может быть рассчитана на основе асимптотической теории, развитой А. Н. Рожковым [1]. Эта теория предсказывает наличие универсального режима утоньшения нити, причем утоньшение нити вплоть до ее исчезновения за конечное время сопровождается монотонным нарастанием ориентации макромолекул и упругих напряжений. Имеется удовлетворительное согласие между результатами теории и экспериментальными данными для разбавленных растворов полимеров, исследованных в работах А. В. Базилевского, С. И. Воронкова, В. М. Ентова и А. Н. Рожкова [1, 2]. Динамика утоньшения нитей в четочной структуре исследовалась теоретически и экспериментально также в работах Р. Schümmer'a и К. Н. Tebel'a [1—3]. Кинетика заключительной стадии распада нити определяется закономерностями релаксации напряжений в полимерном растворе в области весьма больших накопленных упругих деформаций. По этой причине, во-первых, различные реологические модели приводят к различным оценкам для времени распада и, во-вторых, наблюдение за кинетикой распада нити может служить способом проверки адекватности предсказаний теории в этом диапазоне параметров (см. цитированные выше работы, а также книгу З. П. Шульмана и Б. М. Хусида [3]).

## ИЗГИБНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ЖИДКИХ СТРУЙ. ВЫСОКОСКОРОСТНЫЕ СТРУИ

В данной главе рассматривается рост изгибных возмущений жидких струй. В случае высокоскоростных ламинарных струй весьма вязких жидкостей рост этих возмущений обусловлен действием окружающего воздуха, давление которого на выпуклых участках поверхности струи меньше, чем на вогнутых. При достаточно больших скоростях это ведет к росту искривлений оси струи (см. рис. 9,а). Другой механизм, существенный для медленных струй весьма вязких жидкостей, связан с продольным

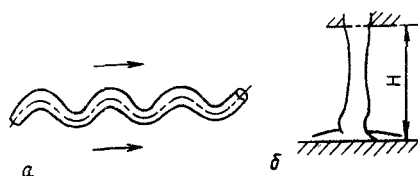


Рис. 9. Изгибные возмущения жидких струй:

а — вид высокоскоростной ламинарной струи, движущейся в воздухе;  
б — выпучивание жидкой струи, натекающей на стенку

сжатием, создаваемым в жидкой струе либо за счет взаимодействия с окружающей средой (трение, архимедова сила), либо при натекании на препятствие (см. рис. 9,б). Наряду с этим в данной главе рассмотрены особенности разрушения высокоскоростных струй маловязких жидкостей, движущихся в воздухе.

### § 1. Изгибный распад высокоскоростных тонких струй вязких и реологически сложных жидкостей, движущихся в воздухе

Начиная с экспериментов А. Хаенлейна [1] стало ясно, что ламинарные струи высоковязких жидкостей, движущихся в воздухе с достаточно большими скоростями, могут распасться вследствие роста длинноволновых изгибных возмущений (см. также недавнюю работу R. W. Freeman'a и L. L. Tavlarides'a [1]). В этом случае с ростом скорости истечения струи  $V_0$  длина ее сплошной части  $L$  убывает вплоть до момента перехода к турбулентному режиму течения (в противоположность случаю капиллярного распада), чему соответствует падающий участок  $DE$  в зависимости  $L=L(V_0)$ , представленной на рис. 2 и обобщающей экспериментальные данные (R. P. Grant и S. Middleman [1]). Теоретическое изучение динамики изгибных возмущений высокоскоростных струй начато работами С. Вебера [1], Р. Дебуе и Ж. Даена [1] и В. А. Иванова [1]. При этом возникает весьма сложная трехмерная задача о динамическом

действии потока воздуха на поверхность струи, эволюция которой также подлежит определению. Р. Debye и J. Daen [1] в линейном приближении исследовали плоский изгиб круглой струи идеальной жидкости. Для пространственно-периодических волн изгибных возмущений (временная неустойчивость) ими получено следующее характеристическое соотношение.

$$i\omega = \pm \chi \sqrt{-\frac{\rho_1 V_0^2 K_1(\chi) I_1'(\chi)}{\rho a_0^2 K_1'(\chi) I_1(\chi)} - \frac{\alpha}{\rho a_0^3} \frac{\chi I_1'(\chi)}{I_1(\chi)}} \quad (3.1)$$

(обозначения те же, что и в главе 1). Из всех членов, описывающих динамическое действие воздуха на поверхность струи, здесь оставлен лишь наибольший — порядка  $\rho_1 V_0^2$ , так как  $\rho_1 \ll \rho$ . Поверхностное натяжение в данном случае является стабилизирующим фактором, так как изгиб ведет к увеличению поверхности струи ( $I_1'(\chi) > 0$ ,  $K_1'(\chi) < 0$  для любого  $\chi$ ). Начиная с некоторого значения скорости  $V_0$  первый член подкоренного выражения в (3.1) превосходит по абсолютной величине второй, что соответствует неустойчивости — экспоненциальному росту изгибных возмущений струи. Неустойчивость обусловлена характерным распределением давления на поверхности струи: в рамках модели идеального газа давление на выпуклых участках меньше, чем на вогнутых.

Изложенная теория не учитывает ряда важных факторов. Главный из них — это влияние вязкости, которая должна препятствовать росту возмущений. Далее, в соответствии с наблюдениями В. А. Иванова [1] растущие изгибные возмущения искажают ось струи пространственным, а не плоским образом. Кроме того, в случае струй маловязких жидкостей наряду с изгибными возмущениями растут и осесимметричные капиллярные возмущения, что ведет к заметному искажению размеров и формы сечения в процессе изгиба (В. А. Иванов [1], R. P. Grant и S. Middleman [1]). Более того, они, по-видимому, являются определяющими, так что анализ изгиба в рамках теории идеальной жидкости внутренне противоречив. Учет этих факторов при исследовании изгибных возмущений с использованием уравнений Навье—Стокса затруднителен. Трудности, возникающие при теоретическом исследовании изгибных возмущений, сравнительно легко могут быть преодолены на основе квазиодномерного описания движения жидкости в струе. В работах В. М. Ентова и А. Л. Ярина [1, 2, 5] и А. Л. Ярина [2, 7] из интегральных балансов массы, количества движения и момента количества движения, а также путем осреднения трехмерных дифференциальных уравнений гидродинамики по сечению струи получены общие квазиодномерные уравнения динамики тонких струй капельных жидкостей, описывающие, в частности, случай изгибных возмущений. Уравнения неразрывности, количества движения и момента количества движения в общем слу-

чае пространственного движения тонкой струи в воздухе имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda f}{\partial t} + \frac{\partial W f}{\partial s} &= 0, \quad f = \pi a^2, \\ \frac{\partial \lambda f \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial W f \mathbf{V}}{\partial s} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} (P \boldsymbol{\tau} + \mathbf{Q}) + \lambda \mathbf{F} f + \mathbf{q} \frac{\lambda}{\rho}, \\ \frac{\partial \lambda \mathbf{K}}{\partial t} + \lambda [\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{j}_2 - k \mathbf{U} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j}_1 + \delta \mathbf{j}_1)] + \frac{\partial}{\partial s} (W \mathbf{K}_1 + \mathbf{j}_3 \times \mathbf{V}) &= \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} + \frac{\lambda}{\rho} \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{Q} + \mathbf{m} \frac{\lambda}{\rho} - \lambda k \mathbf{j}_1 \times \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решение задач гидродинамики струй сводится к отысканию во времени  $t$  и по пространственной координате  $s$  «интегральных» параметров — площади поперечного сечения  $f$ , скорости центра тяжести жидкого сечения  $\mathbf{V}$  и угловой скорости этого сечения  $\boldsymbol{\Omega}$ . Второе уравнение (3.2) — уравнение количества движения — выражает собой баланс приложенных к элементу струи сил, а именно: инерционных, внутренних и внешних. Третье уравнение (3.2) выражает баланс моментов этих сил, а его левая часть — скорость изменения момента сил инерции. В системе (3.2)

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_D (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) dS - k \mathbf{j}_1 \times \mathbf{V}, \quad \mathbf{K}_1 = \int_D (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) dS, \\ \mathbf{j}_1 &= \int_D y \mathbf{x} dS, \quad \mathbf{j}_2 = \int_D (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) [(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \cdot (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau})] dS, \\ \mathbf{j}_3 &= \int_D \mathbf{x} [(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \cdot (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau})] dS, \quad \lambda = \left| \frac{\partial R}{\partial s} \right|, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{U} = \partial \mathbf{R} / \partial t, \quad W = V_{\boldsymbol{\tau}} - U_{\boldsymbol{\tau}}, \quad \delta = -\frac{1}{2} (\lambda^{-1} \partial V_{\boldsymbol{\tau}} / \partial s - k V_n).$$

Введены обозначения:  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{x}$  — радиус-векторы оси струи и точки в сечении струи ( $\mathbf{x}$  отсчитывается от центра сечения  $D(s, t)$ );  $\mathbf{F}$  — плотность массовых сил;  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{m}$  — распределенные сила и момент, действующие на струю;  $\mathbf{Q}$  — перерезывающая сила в сечении струи, для определения которой служит третье уравнение (3.2);  $k$  — кривизна оси струи;  $\rho$  — плотность жидкости. Используются векторы сопровождающего трехгранника оси струи:  $\mathbf{n}$  — орт нормали,  $\mathbf{b}$  — орт бинормали,  $\boldsymbol{\tau}$  — орт касательной к оси струи. Угловая скорость вращения этого трехгранника при изгибе струи обозначена  $\boldsymbol{\omega}$ . Индексами  $n$ ,  $b$  и  $\boldsymbol{\tau}$  отмечены проекции на нормаль, бинормаль и касательную к оси струи;  $y$  — координата, отсчитываемая по нормали. Величина продольной силы в сечении струи  $P$  и момент внутренних напряжений  $\mathbf{M}$  в случае струи ньютоновской жидкости кругового сечения радиуса  $a$  связаны с кинематическими характеристиками посредством соотношений

$$\begin{aligned}
P &= \left[ 3\mu \left( \lambda^{-1} \frac{\partial V_\tau}{\partial s} - kV_n \right) - \alpha G \right] f + P_\alpha, \\
G &= a^{-1} \left[ 1 + \lambda^{-2} \left( \frac{\partial a}{\partial s} \right)^2 \right]^{-1/2} - \left[ 1 + \lambda^{-2} \left( \frac{\partial a}{\partial s} \right)^2 \right]^{-3/2} \lambda^{-1} \frac{\partial}{\partial s} \left( \lambda^{-1} \frac{\partial a}{\partial s} \right), \\
P_\alpha &= 2\pi a \alpha \left[ 1 + \lambda^{-2} \left( \frac{\partial a}{\partial s} \right)^2 \right]^{-1/2}, \\
M_n &= 3\mu I \left( \lambda^{-1} \frac{\partial \Omega_n}{\partial s} + k\Omega_\tau - \kappa \Omega_b \right), \\
M_b &= 3\mu I \left( \lambda^{-1} \frac{\partial \Omega_b}{\partial s} + \kappa \Omega_n - \frac{3}{2} k \lambda^{-1} \frac{\partial V_\tau}{\partial s} + \frac{3}{2} k^2 V_n \right) - \\
&\quad - \alpha k I a^{-1} \left[ 1 + \lambda^{-2} \left( \frac{\partial a}{\partial s} \right)^2 \right]^{-3/2}, \quad I = \frac{\pi a^4}{4}, \\
M_\tau &= \mu I \left( 2\lambda^{-1} \frac{\partial \Omega_\tau}{\partial s} + k \lambda^{-1} \frac{\partial V_b}{\partial s} + k \kappa V_n - k \Omega_n \right).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь  $\kappa$  — кручение оси струи;  $\mu$  и  $\alpha$  — коэффициенты вязкости и поверхностного натяжения жидкости.

Система уравнений (3.2) — (3.4) пригодна для описания как осесимметричных капиллярных возмущений (уравнения (1.11) и (1.12) являются ее частным случаем), так и изгибных возмущений. Она замкнута, если сечение струи обладает двойной симметрией (в частности, для струй кругового сечения). Эта система получена в предположениях о тонкости струи и об отсутствии на ее поверхности значительных касательных напряжений. Такие предположения с удовлетворительной точностью выполняются при движении струй весьма вязких жидкостей в воздухе. В случае коротковолновых возмущений и больших кривизн оси струи, а также движения струи в жидкой окружающей среде со сравнимой вязкостью квазиодномерное описание, строго говоря, неприменимо. Предположения о тонкости струи и об отсутствии на ее поверхности значительных касательных напряжений приводят к дополнительным ограничениям на внутреннюю кинематику струи

$$\Omega_n = -\lambda^{-1} \frac{\partial V_b}{\partial s} - \kappa V_n, \quad \Omega_b = \lambda^{-1} \frac{\partial V_n}{\partial s} - \kappa V_b + kV_\tau. \tag{3.5}$$

К системе уравнений (3.2) — (3.5) присоединяется кинематическое уравнение, определяющее положение оси струи в пространстве в соответствии с полем скоростей жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \mathbf{V} - (\lambda \mathbf{V} \cdot \mathbf{i}) \boldsymbol{\tau}, \tag{3.6}$$

записанное здесь для простейшего случая, когда касательная к оси струи в любой момент времени и во всех точках составляет острый угол с некоторой прямой  $O_1\xi$  и можно, введя декартову систему координат  $O_1\xi\eta\xi$  с ортами  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , задать ось струи уравнениями

$$\xi = s, \quad \eta = H(s, t), \quad \xi = Z(s, t), \quad \mathbf{R} = \mathbf{i}\xi + \mathbf{j}H + \mathbf{k}Z. \tag{3.7}$$

В других случаях параметр оси струи может быть выбран иначе, что ведет к изменению выражения для  $\partial \mathbf{R} / \partial t$ .

Распределенные внешние силы  $\mathbf{q}$  и момент  $\mathbf{m}$  должны быть заданы особо. В частности, для малых пространственных возмущений струи, движущейся в воздухе, из теории потенциального обтекания имеем

$$\mathbf{q} = -\rho_1 V_0^2 f_0 \left( \mathbf{j} \frac{\partial^2 H}{\partial s^2} + \mathbf{k} \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} \right), \quad \mathbf{m} = 0, \quad f_0 = \pi a_0^2. \quad (3.8)$$

Для конечных возмущений учитывается дополнительно лобовое сопротивление воздуха. Так, для плоского изгиба

$$\mathbf{q} = -\rho_1 V_0^2 \left\{ f \frac{\partial^2 H}{\partial s^2} \left[ 1 + \left( \frac{\partial H}{\partial s} \right)^2 \right]^{-5/2} + a \left( \frac{\partial H}{\partial s} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 + \left( \frac{\partial H}{\partial s} \right)^2 \right]^{-1} \operatorname{sign} \left( \frac{\partial H}{\partial s} \right) \right\} \mathbf{n}, \quad \mathbf{m} = 0. \quad (3.9)$$

Этим достигается замыкание уравнений квазиодномерного приближения.

Подобные уравнения получены также в работе Б. М. Хусида [1], исходя из вариационного принципа Даламбера—Лагранжа, причем отличие сводится лишь к ряду асимптотически малых для тонких струй членов (см. также книгу З. П. Шульмана и Б. М. Хусида [3]).

Обобщение на случай псевдопластической и дилатантной жидкостей дано в работе А. Л. Ярина [3]; изменяются только выражения для продольной силы  $P$  и момента внутренних напряжений  $\mathbf{M}$  в сечении струи.

С использованием приведенной системы квазиодномерных уравнений В. М. Ентов и А. Л. Ярин [1, 3] получили характеристическое уравнение малых пространственных изгибных возмущений тонких струй весьма вязких ньютоновских жидкостей, движущихся в воздухе (временная неустойчивость)

$$(i\omega)^2 + \frac{3}{4} \frac{\mu \chi^4}{\rho a_0^2} (i\omega) + \left( \frac{\alpha}{\rho a_0^3} - \frac{\rho_1 V_0^2}{\rho a_0^2} \right) \chi^2 = 0. \quad (3.10)$$

Это уравнение может также быть получено с помощью подхода работы С. Weber'a [1], предполагающего аналогию между механикой изгиба струй и балок. Оно также было установлено в работах Б. М. Хусида [2] и З. П. Шульмана и Б. М. Хусида [3].

Как плоские, так и пространственные изгибные возмущения в соответствии с (3.10) нарастают с одной и той же скоростью, если  $V_0 > \sqrt{\alpha / (\rho_1 a_0)}$ , причем искажениями струи, связанными с ростом капиллярных возмущений, можно пренебречь при выполнении неравенства  $\mu^2 (\rho a_0^2 \rho_1 V_0^2)^{-1} \gg 1$ . Отметим, что при  $\mu = 0$  (3.10) совпадает с длинноволновым ( $\chi \rightarrow 0$ ) пределом уравнения (3.1). Длина струи до распада под действием изгибных возмущений определяется выражением

$$L = \Delta \cdot \left[ \frac{3\mu\rho a_0^2 V_0^3}{(\rho_1 V_0^2 - \alpha/a_0)^2} \right]^{1/3}, \quad (3.11)$$

где  $\Delta = \ln(ma_0/\delta_0)$ ,  $m = 2 \div 4$ ,  $\delta_0$  — начальная амплитуда изгибного возмущения. Значение множителя  $m$  выбрано в соответствии с экспериментальными данными (А. Haenlein [1], R. P. Grant и S. Middleman [1]) и энергетическими оценками, показывающими, что по достижении амплитудой изгибного возмущения величины порядка нескольких начальных радиусов струи, она локально практически мгновенно расплющивается внешним перепадом давления воздуха. Выражение (3.11) предсказывает уменьшение длины струи до распада с ростом скорости истечения, что качественно согласуется с экспериментальными данными, отвечающими изгибным возмущениям (участок  $DE$  в зависимости  $L = L(V_0)$  на рис. 2). Изгибные возмущения струй, движущихся в воздухе, экспериментально исследованы недостаточно. Было бы целесообразно сопоставить определяемые экспериментально для струй высоковязких жидкостей максимальную скорость роста изгибных возмущений и соответствующую длину волны возмущения с предсказаниями уравнения (3.10). К сожалению, в недавней работе М. G. Stockman'a и А. Веjan'a [1] эти характеристики были определены только для струй маловязких жидкостей, для которых  $\mu^2(\rho a_0^2 \rho_1 V_0^2)^{-1} < 1$ , и изложенная теория неприменима. Проведенное этими авторами сравнение с теорией роста возмущений, искривляющих линии тока затопленных газовых струй, некорректно, так как в подобных течениях в отличие от тонких струй капельных жидкостей доминируют эффекты неустойчивости сдвиговых слоев. Некорректен поэтому и сделанный, исходя из расхождения теории устойчивости газовых струй и эксперимента (М. G. Stockman и А. Веjan [1]), вывод о том, что изгибные возмущения струй капельных жидкостей всегда растут вследствие выпучивания под действием продольного сжатия (силой трения о воздух; см. следующий параграф), а не в результате действия «подъемной силы». Никакой оценки сжимающей силы, а также последствий ее действия авторы упомянутого эксперимента не дают, поэтому вопрос о причинах и механизме изгиба струй, наблюдавшегося ими, остается открытым. Тем более недопустимо переносить выводы работы М. G. Stockman'a и А. Веjan'a [1] на высокоскоростные струи весьма вязких жидкостей.

В работах В. М. Ентова и А. Л. Ярина [1, 5] и А. Л. Ярина [2, 4] приводятся результаты численного исследования роста конечных изгибных возмущений в рамках квазиодномерной теории. Показано, что нелинейные эффекты, основной из которых — вязкие напряжения, обусловленные удлинением оси струи при изгибе, несколько замедляют рост возмущений, хотя для оценок вплоть до амплитуд изгибных возмущений порядка  $(2 \div 4) a_0$  можно с хорошей точностью экстраполировать результаты линейной теории. Наличие в (3.9) квадратичной силы ло-



бового сопротивления воздуха приводит к медленному сносу изгибных возмущений против направления движения струи наряду с ростом их амплитуды, обусловленным «подъемной» составляющей аэродинамической силы  $q$ . Вид отрезка оси струи, соответствующего одной длине волны возмущения в последовательные моменты времени, обозначенные цифрами возле кривых, показан на рис. 10. Как видно, в конце концов ось струи приобретает форму уступа и возникает «перехлест». При этом амплитуда изгибного возмущения порядка  $4a_0$ . Результаты численного исследования роста изгибных возмущений струй псевдопластической и дилатантной жидкостей приведены в работе А. Л. Ярина [3].

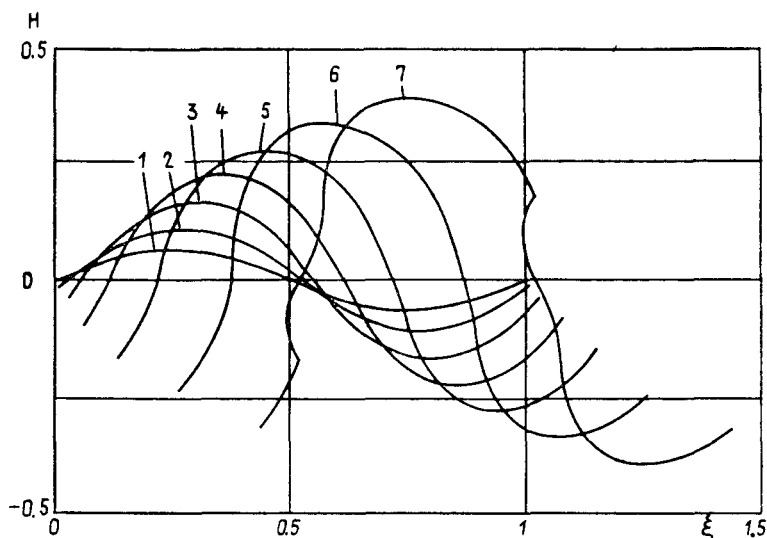


Рис. 10. Эволюция конечных изгибных возмущений оси струи при наличии силы лобового сопротивления воздуха. График построен в безразмерных величинах. Линейным масштабом служат длина волны наиболее быстро растущего малого изгибного возмущения  $l = 2\pi [(9/8)\mu^2 a_0^4 / (\rho_1 U_0^2)]^{1/6}$ , а масштабом времени, указанного цифрами у кривых,  $T = [\rho \mu a_0^2 / (\rho_1^2 U_0^4)]^{1/3}$  — характерное время роста малых изгибных возмущений (В. М. Ентов и А. Л. Ярин [1, 5], А. Л. Ярин [2, 4])

Скорость роста изгибных возмущений струй степенных жидкостей, а также влияние на нее дополнительного нелинейного эффекта — напряжений, связанных с удлинением оси струи при изгибе, удобно исследовать, исходя из энергетического баланса: работа распределенной аэродинамической силы расходуется на изменение кинетической и поверхностной энергий жидкости и на вязкую диссипацию. Задаваясь синусоидальной формой возмущения, получаем дифференциальное уравнение, определяющее зависимость амплитуды от времени в виде (А. Л. Ярин [3]).

$$\begin{aligned}
& A'' + 4 \cdot 3^{\frac{n+1}{2}} \frac{K}{\rho_1 a_0^{n+1}} \chi^{2n+2} \left[ \Gamma^2 \left( \frac{n+2}{2} \right) / \Gamma^2 \left( \frac{n+3}{2} \right) \right] \frac{1}{n+3} (A')^n + \\
& + \frac{3}{2} \cdot 3^{\frac{n+1}{2}} \frac{K}{\rho_1 a_0^{n+3}} \chi^{2n+2} \left\{ \Gamma^2 \left( \frac{n}{2} \right) / \left[ \Gamma \left( \frac{n+5}{2} \right) \Gamma \left( \frac{n+1}{2} \right) \right] \right\} \times \\
& \times n A^2 (A')^n + A \chi^2 \left( \frac{\alpha}{\rho a_0^3} - \frac{\rho_1 V_0^2}{\rho a_0^2} \right) = 0. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Это уравнение справедливо для изгибных возмущений с ограниченной амплитудой  $A < a_0$ . При  $n=1$ ,  $K=\mu$  оно описывает динамику изгибных возмущений струи ньютоновской вязкой жидкости, причем после линеаризации (3.12) и подстановки в него  $A(t) = e^{i\omega t}$  получается, что скорость роста амплитуды удовлетворяет точному уравнению (3.10). Как и в случае осесимметричных капиллярных возмущений (гл. 2), в развитии изгибной неустойчивости струй псевдопластических жидкостей основную роль играет начальный период, пока амплитуды возмущений и скорости деформаций малы; напротив, для струй дилатантных жидкостей рост эффективной вязкости приводит к относительному замедлению роста возмущений на поздней стадии.

Обобщение характеристического уравнения для скорости роста малых изгибных возмущений струи ньютоновской жидкости (3.10) на случай вязкоупругой максвелловской жидкости дано в работах Б. М. Хусида [2] и З. П. Шульмана и Б. М. Хусида [3].

То обстоятельство, что при наличии продольного натяжения струя остается устойчивой по отношению к изгибным возмущениям, означает, что по натянутой струе, как по струне, могут распространяться поперечные волны, скорость которых пропорциональна квадрату корню из натяжения. Это открывает возможность для исследования напряжений в струях по наблюдению распространения по ним принудительно создаваемых волн. Такие наблюдения, выполненные в работах S. Gogen'a и J. Gavis'a [1], S. Middleman'a и J. Gavis'a [1], З. П. Шульмана, В. И. Кордонского, В. А. Кузьмина и Б. М. Хусида [1], особенно интересны для упруговязких жидкостей, так как позволяют проследить за релаксацией возникающих при формировании струи значительных упругих напряжений.

## § 2. Продольный изгиб жидких струй и нитей

Принципиально иной механизм роста изгибных возмущений тонких жидких струй и нитей обнаружил G. I. Taylor [6, 7]. Это — выпучивание струй и нитей высоковязких жидкостей,

движущихся с малыми скоростями и на некотором протяжении подвергающихся продольному сжатию. В экспериментах G. I. Taylor'a [6, 7] продольная сжимающая сила создавалась либо за счет трения струи о воздух, либо путем продольного сдавливания двумя палочками очень вязкой жидкой нити, лежащей на поверхности налитой в чашку ртути. Кроме того, наблюдался продольный изгиб тонких струй, распространяющихся в жидкой среде, при внезапном увеличении выталкивающей силы (при переходе струи в слой более плотной жидкости), а также при натекании струй на плоскую поверхность (см. рис. 9, б). Последнее явление детально исследовалось в работах В. R. Munson'a [1] и J. O. Cruickshank'a и В. R. Munson'a [1]. Ими было показано, что выпучивание наблюдается лишь у достаточно медленных струй очень вязких жидкостей. Струи с числом Рейнольдса  $Re$  (по условиям истечения), превосходящим критическое значение  $Re_c \approx 1.2$ , устойчивы и сохраняют прямолинейную форму. Таким образом, неустойчивость, ведущая к росту изгибных возмущений, в данном случае возникает при уменьшении числа Рейнольдса. С другой стороны, имеется также ограничение на расстояние от среза насадка до плоскости  $H$  (см. рис. 9, б): если  $H$  меньше некоторого критического значения  $H_c$ , то изгиб также не наблюдается. Сразу же после потери устойчивости ( $Re \leq Re_c$ ,  $H/d \geq H_c/d$ ;  $d$  — диаметр насадка) появляются двумерные изгибные возмущения, ось струи остается плоской кривой, струя укладывается на поверхность пластины в виде складок. Но с дальнейшим увеличением отношения  $H/d$  изгибные возмущения приобретают вид спирали, ось струи становится пространственной кривой, и струя укладывается на поверхность пластины в виде колец. J. O. Cruickshank и В. R. Munson [1] установили зависимость  $H_c$  и частоты, с которой жидкие кольца укладываются на плоскость, от поверхностного натяжения, вязкости жидкости, скорости ее истечения и диаметра трубки. Выпучивание наблюдается и у горизонтальных струй, сжимаемых непосредственно после выхода из насадка (площадь сечения таких струй сразу же начинает увеличиваться). Все это подтверждает представления G. I. Taylor'a [6], что выпучивание жидких струй обусловлено наличием продольной сжимающей силы и является прямым аналогом эйлеровой неустойчивости тонких упругих стержней. Общая задача об изгибе продольно сжатой жидкой нити рассмотрена в работе J. Buckmaster'a [1], сделавшего первый шаг в теоретическом исследовании этого вопроса с использованием квазиодномерных уравнений. Это исследование пока не получило дальнейшего развития за исключением работы J. D. Buckmaster'a, A. Nachman'a и L. Ting'a [1], в которой была рассчитана форма однородной жидкой нити, сжатой с двух концов. При исследовании устойчивости и выпучивания продольно сжимаемых жидких струй в дальнейшем может быть полезно стационарное од-

номерное решение, найденное в работе J. O. Cruickshank'a и B. R. Munson'a [2]. В то же время J. O. Cruickshank и B. R. Munson [3, 4] предложили полуэмпирическую теорию, позволяющую рассчитать радиус колец, образуемых спирально укладываемой струей, и частоту укладки.

На изгибную неустойчивость струй могут оказывать влияние и дополнительные факторы: интенсивный тепло- и массоперенос для струй перегретых жидкостей (A. F. Charwat и R. R. Rusali [1]), достаточно сильное внешнее электрическое поле (G. I. Taylor [7], A. G. Bailey и W. Balachandran [1]) и другие.

### § 3. Нерегулярный распад струй. Высокоскоростные струи, влияние турбулентности, распыливание

Основные формы неустойчивости и распада струй, о которых речь шла выше, могут быть названы регулярными, так как они обусловлены развитием одной или нескольких «главных» мод возмущения. Эти формы неустойчивости могут быть изучены и теоретически и экспериментально.

С повышением интенсивности движения на передний план выступают сложные многомодовые режимы неустойчивости. Количественное экспериментальное изучение их затруднено, а теоретическое практически отсутствует. В то же время, именно многомодовые режимы играют основную роль при распыливании топлива в двигателях, и потому по ним накоплен значительный эмпирический материал, с трудом поддающийся теоретическому осмыслению. В данном параграфе кратко обсуждены лишь некоторые принципиальные моменты. Более глубокий анализ вопросов, связанных с распадом высокоскоростных струй, содержится в известной монографии Ю. Ф. Дитякина, Л. А. Клячко, Б. В. Новикова и В. И. Ягодкина [1].

Рост скорости истечения жидкости приводит к генерации вихрей в сдвиговом течении в насадке и турбулизации свободных струй. Переходу к турбулентному режиму соответствует число Рейнольдса, приблизительно равное 2000 (по условиям истечения, R. E. Phinney [3]). В зависимости от формы насадка это значение может изменяться в широких пределах от 240 до 10 000 (J. Isiek [1]). Турбулентность существенно влияет на длину струи до распада, причем по-разному в зависимости от ведущего механизма распада. Как указывалось в § 1 главы 1 в случае струй маловязких жидкостей с малым числом Онезорге  $Z$ , турбулизация приводит к уменьшению длины струи и появлению максимума на кривой  $L=L(V_0)$ , причем в определенном диапазоне скоростей истечения изменение плотности окружающего воздуха не влияет на распад струй (R. E. Phinney [4]). По-видимому, в данном случае влияние турбулентности в основном, сводится к резкому увеличению уровня начальных возмущений (R. E. Phinney [3]). Такой же вывод следует из рабо-

ты D. A. Ervine'a, E. McKeogh'a и E. M. Elsayw [1], в которой длина турбулентных струй уменьшалась с ростом уровня турбулентных пульсаций на выходе из насадка. С другой стороны, турбулизация струй с достаточно большими значениями числа  $Z$  (и малыми возмущениями, генерируемыми при входе жидкостей в насадок) наступает при больших скоростях вслед за появлением растущих в результате динамического действия воздуха изгибных возмущений. В этом случае, как показывают экспериментальные данные (R. P. Grant и S. Middleman [1], J. Iciek [1, 2]), турбулизация приводит к росту длины струи до распада, чему соответствует участок  $EF$  рис. 2, хотя время до распада струи при переходе к турбулентному режиму уменьшается. J. Iciek [1] для этого участка предлагает эмпирическую формулу  $L/(2a_0) = 11.5We^{0.31}$ . Рост длины таких струй с  $V_0$  вызван тем, что скорость истечения растет быстрее, чем убывает время до распада. Возможно, это объясняется увеличением эффективной вязкости в струе с ростом скорости истечения и, соответственно, уровня турбулентности.

Для турбулентных струй возможен гистерезис зависимости  $L=L(V_0)$ , связанный с изменением характера течения в насадке — отрывом жидкости от его стенок (J. Iciek [1, 2]). Теория распада турбулентных струй капельных жидкостей, фактически, только начинает развиваться (см. например, работу P. Lafrance'a [3]).

С дальнейшим увеличением скорости  $V_0$  на поверхности струй начинают расти коротковолновые возмущения, усиливаемые полем давления в обтекающем их потоке воздуха. Это ведет к отрыву от поверхности струи множества мелких капель, образующих вокруг сплошной части струи капельно-воздушное облако (распыливание струи). В монографии В. Г. Левича [1] показано, что струи достаточно вязких жидкостей не распыливаются подобным образом, что подтверждается экспериментальными данными R. D. Reitz'a и F. V. Врассо [1]. Длина распыливаемой струи до распада уменьшается с ростом  $V_0$ ; в соответствии с экспериментальными данными А. С. Лышевского [1] и Ю. Ф. Дитякина, Л. А. Клячко, Б. В. Новикова, и В. И. Ягодкина [1]  $L \sim V_0^{-1.42}$ , а переходу к распыливанию отвечает  $Re = 16.2(Z/2)^{-0.434} M^{-0.525}$  ( $Re = 2V_0 a_0 \rho / \mu$ ,  $M = \rho_1 / \rho$ ). Это, по-видимому, должно вести к появлению убывающего участка в зависимости  $L=L(V_0)$  вслед за участком  $EF$  (см. рис. 2) и, соответственно, к появлению второго максимума (Л. Ф. Верещагин, А. А. Семерчан и С. С. Секоян [1], M. J. McCarthy и N. A. Molloy [1]).

Достаточно тонкая струя с радиусом  $a_0 \approx 10^{-3}$  м успевает полностью разрушиться в результате отрыва мелких капель с ее поверхности при распыливании. Исходя из представления о распыливании как следствии усиления потоком воздуха коротковолновых возмущений высокоскоростной струи, В. Г. Левич

[1] рассчитал время полного распыливания тонкой струи и получил грубую оценку ее длины до распада  $L \approx 30a_0$  ( $L$  не зависит от  $V_0$  в противоречии с экспериментом). Отметим, что скорость роста коротковолновых возмущений не зависит от радиуса струи (так как длина волны много меньше  $a_0$ ) и, фактически, может быть вычислена для плоской поверхности (см. например, работу L. Garmendia [1], в которой дополнительно учитываются электрические силы, ускоряющие рост возмущений). Рассмотренный выше механизм распыливания не является единственным. Ряд других возможных причин обсуждается в работах R. D. Reitz'a и F. V. Bracco [1, 2]. Важной для приложений характеристикой является угол факела распыленной жидкости. Его величина и изменение в ограниченном диапазоне режимных параметров, а также размеры капель в факеле в настоящее время определены лишь экспериментально (А. С. Лышевский [2], Ю. Ф. Дитякин, Л. А. Клячко, Б. В. Новиков и В. И. Ягодкин [1]).

Распад более толстых струй воды с радиусом  $a_0 \approx 10^{-2}$  м, движущихся в воздухе со скоростями порядка нескольких десятков метров в секунду, также начинается с отрыва от их поверхности мелких капель — распыливания (J. W. Hoyt, J. J. Taylor и C. D. Runge [1], J. W. Hoyt и J. J. Taylor [1]). Однако из-за большой массы жидкости в толстых струях они не успевают распылиться полностью — одновременно растущие изгибные возмущения приводят к распаду сплошной части на крупные сгустки, разрушающиеся на капли при своем дальнейшем движении в воздухе. Длина нераспавшейся части таких струй  $L$  убывает с ростом скорости истечения. А. П. Исаев [1] предложил формулу  $L/d_0 = 278.5 - 2.1 \cdot 10^{-4} Re$  (число Рейнольдса составлено по условиям истечения). Малые полимерные добавки, делающие жидкость вязкоупругой, подавляют распыливание (J. T. Davies и A. A. Young-Hoop [1], J. W. Hoyt и J. J. Taylor [2—4]).

Для струй умеренно вязких жидкостей, вытекающих с очень большими скоростями (порядка сотен метров в секунду) характерен унос встречным потоком жидкости с головной части струи, откуда срывается жидкая осесимметричная пленка, окружающая сплошную часть струи. Эта пленка в дальнейшем разрушается на капли. Срыв пленки происходит также на любом достаточно выраженном выступе (возмущении) сплошной части струи. Этот механизм разрушения исследовали В. Duppe и В. Cassen [1, 2], В. К. Баев, А. Н. Бажайкин, И. В. Болдырев, А. А. Бузуков, В. А. Терентьев и Б. П. Тимошенко [1], В. К. Баев, А. Н. Бажайкин, Е. И. Биченков, А. А. Бузуков, Р. Л. Рабинович и Б. П. Тимошенко [1], В. К. Баев и А. А. Бузуков [1]. В некоторых случаях скорости истечения могут быть столь велики, что жидкость ведет себя как твердое тело, и головная часть струи хрупко разрушается, превращаясь в облако капель

(J. E. Field и M. B. Lesser [1]). Упругость жидкости струи приводит при ее разрушении в высокоскоростном потоке к заметному увеличению размеров образующихся капель (1÷10% растворы полимеров; J. E. Matta и R. P. Tytus [1], J. E. Matta, R. P. Tytus и J. L. Harris [1]).

В ряде работ исследован механизм разрушения жидких струй, впрыскиваемых в сносящий газовый поток (часто сверхзвуковой) — ситуация, имеющая место, например, в реактивных двигателях. Основным интерес здесь представляют глубина проникания струи и размеры образующихся при ее разрушении капель (В. И. Кабаков и И. Т. Аладьев [1], А. П. Авраменко и В. Н. Горбунов [1], J. A. Schetz, E. A. Kush и P. B. Joshi [1], P. Hewitt и J. A. Schetz [1]).

## Глава 4

### ГИДРОДИНАМИКА ФОРМОВАНИЯ ВОЛОКОН

Важный класс струйных течений, внешне очень простых, но играющих огромную роль в современной промышленности и обрабатывающих нетривиальное динамическое поведение, лежит в основе технологического процесса формирования волокон. Число работ по анализу процесса формирования волокон огромно; даже упомянуть их здесь не представляется возможным. В настоящей главе предпринята попытка обзора основных исследований процесса формирования как гидродинамического явления. При этом основное внимание сосредоточено на способе формирования волокон из расплава — типичном элонгационном течении, родственном струйным течениям капельных жидкостей, рассмотренным в предыдущих главах. Детальное описание этого и других способов формирования волокон с позиций механики читатель найдет в монографиях A. Ziabicki [1], C. D. Han'a [1] и S. Middleman'a [1].

#### § 1. Основные направления экспериментальных исследований

Существует три наиболее важных способа формирования волокон. В первом из них (формование из расплава) расплавленный материал, как правило, полимер или жидкое стекло, подается с помощью дозирующего насоса через насадок-фильеру, растягивается в струйном течении, остывает, отвердевает и в виде волокна наматывается на приемную бобину (рис. 11). В последнее время широкое распространение получил процесс соэкструзии, предназначенный для формирования из расплава бикомпонентных синтетических волокон (C. D. Han [1]), приобретающих при остывании извитость из-за разницы в коэффи-

циентах теплового расширения компонент, что делает материал из искусственных волокон похожим на шерсть. Модификацией способа формования из расплава является технология производства нетканых материалов, в которой жидкое волокно растягивается не с помощью приемной бобины, а силой трения, создаваемой коаксиальным высокоскоростным потоком воздуха. Затем волокно попадает прямо на движущуюся подложку (А. А. Синдеев и Б. А. Харьков [1]). Нити вытягивают и электрическими силами (Р. К. Baumgarten [1]). Стекловолокна часто формируют, вытягивая не из фильеры, а из нагреваемой в печи или лучом лазера стеклянной цилиндрической заготовки (Ф. Т. Geyling [1]).

Два других способа предназначены для формования волокон из неплавящихся полимеров. Эти полимеры растворяют, после чего раствор подают дозирующим насосом, как и при формовании из расплава. При «сухом» способе формования растворитель испаряется в процессе струйного движения раствора от фильеры к бобине в камере с горячим паром. В ряде случаев используется «мокрый» способ формования, в котором раствор при движении от фильеры до бобины находится в осадительной ванне, где происходит постепенная коагуляция полимера и его затвердевание в виде волокна. Во всех трех способах существенную роль играет реологическое поведение формируемой жидкости, что является постоянным стимулом для реологических экспериментов, ориентированных на нужды текстильной промышленности (см. например, F. N. Cogswell [1], J. L. White и Y. Ide [1]), а также способность жидкости вытягиваться в волокно — прядомость (С. J. S. Petrie и М. М. Denn [1] и А. Ziabicki [1]). При формовании из расплава и из раствора «сухим» способом важную роль играет теплообмен волокна с окружающим его газом (а также в ряде случаев и трение о газ). Это обусловило проведение значительного числа экспериментальных работ, посвященных теплообмену и трению на поверхности цилиндрического тела при продольном движении в газовой среде; трение играет некоторую роль при больших скоростях наматывания на бобину порядка  $10^4$  м/мин (см., например, сводку данных в монографии А. Ziabicki [1]).

В ряде работ экспериментально изучены стационарные конфигурации формируемых волокон (см. обзор М. М. Denn'a [1]).

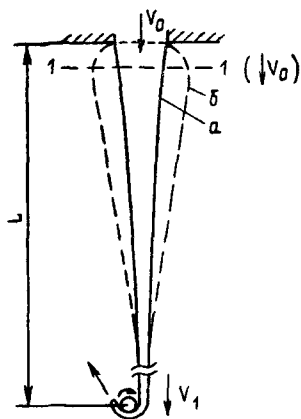


Рис. 11. Схема процесса формования волокон:

*a* — расширение волокна на выходе из фильеры не возникает; *б* — после выхода из фильеры происходит частичная разгрузка от напряжений, накопленных жидкостью при течении в фильере



Значительная часть экспериментальных работ посвящена исследованию неустойчивости процесса формования, прежде всего так называемому «резонансу при вытягивании». Этот вид неустойчивости возникает в ряде случаев с ростом скорости наматывания волокна на приемную бобину и проявляется в виде бегущих волн расширения — сжатия сечений волокна с длиной волны порядка расстояния от фильеры до бобины. Это может вести к обрыву волокна или неравномерности его толщины и свойств. В обзоре С. J. S. Petrie и М. М. Denn'a [1] приведена сводка экспериментальных данных, полученных в строго контролируемых условиях при формовании волокон из полипропилена, линейного и разветвленного полиэтилена, нейлона 6, полистирола, поливинилхлорида, проявляющих упругие свойства, а также воспроизведены данные G. J. Donnelly и С. В. Weinberger'a [1] для изотермического формования ньютоновских жидкостей. Последняя работа представляет значительный интерес, так как она выполнена для проверки модельных представлений теории «резонанса при вытягивании», рассматриваемой в § 3 данной главы, и в ней исключены эффекты, связанные с теплообменом на поверхности волокна, упругостью жидкости и ее затвердеванием. Нить силиконового масла наматывалась на бобину, с которой жидкость сразу удалялась лезвием, установленным вблизи поверхности бобины. Этот эксперимент показал, что «резонанс при вытягивании» возникает сразу же как только единственный безразмерный параметр процесса — кратность вытяжки  $E$  — достигает значения близкого к  $E=20$ . Здесь  $E=V_1/V_0$ , где  $V_0$  — заданная скорость жидкого волокна на срезе фильеры (в ситуации, показанной на рис. 11, а) или в наиболее широком сечении волокна, после прекращения разгрузки от напряжений, возникающих в фильере (рис. 11, б).  $V_1$  — скорость в точке наматывания на бобину. Аналогичные данные получены в работе Н. Ishihara и S. Kase [2], в которой использовалась другая жидкость, демонстрирующая ньютоновское поведение — полиэтилентерефталат, а затвердевание волокна происходило в точке контакта с приемной бобиной, погруженной в холодную воду.

Теплообмен волокна с окружающей средой является стабилизирующим фактором. Данные, приведенные в обзоре С. J. S. Petrie и М. М. Denn'a [1], позволяют заключить, что если теплоотвод достаточно велик, и волокно затвердевает, еще не достигнув приемной бобины, то «резонанс при вытягивании» не возникает. Именно этим объясняется, по-видимому, возможность практически полностью исключить этот вид неустойчивости в промышленных процессах формования, где значения  $E$  достигают нескольких сотен, а  $V_1$  порядка  $10^4$  м/мин. Учитывая, что основная масса волокон формируется из полимерных материалов, естественно поставить вопрос о влиянии на «резонанс при вытягивании» упругих свойств материала. К сожалению

нию, он изучен явно недостаточно. В изотермических условиях для ряда полимеров получаются критические значения кратности вытяжки  $E < 20$  (иногда критическое значение  $E \approx 2$ ), что указывает на дестабилизацию вследствие проявления упругости (детали см., например, в работе С. В. Weinberger'a, G. F. Cruz-Saenz'a и G. J. Donnelly [1]), с другой стороны J. C. Chang и M. M. Denn [1] наблюдали подавление «резонанса при вытягивании» упругими силами.

Еще одним видом неустойчивости, с которым приходится бороться в практике формования, является так называемое «разрушение расплава». Для него характерно появление на жидкой нити на выходе из фильеры изгибных волн и волн изменения диаметра большой амплитуды, а при более развитой неустойчивости — вплоть до превращения экструдата в последовательность комков, практически не связанных между собой. «Разрушение расплава» наступает после достижения определенного значения перепада давления (определенного значения скорости экструзии), создающего поток жидкости из фильеры; это значение зависит от свойств жидкости. Экспериментальные данные, суммированные в обзоре С. J. S. Petrie и M. M. Denn'a [1], показывают, что «разрушение расплава» никогда не наблюдается при экструзии ньютоновских жидкостей. Таким образом, этот вид неустойчивости непосредственно связан с упругими свойствами формуемого расплава. Общепринятого объяснения этого вида неустойчивости, ограничивающего скорость формования волокон, в настоящее время нет, однако есть все основания полагать, что он связан с возникновением автоколебаний в течении расплава полимера внутри фильеры.

## § 2. Кристаллизация и ориентация при формовании; сверхпрочные волокна

Большинство полимеров, используемых для формования волокон, при охлаждении успевают кристаллизоваться и поступающее на приемную бобину волокно обладает определенной степенью кристалличности. Кристаллизовавшиеся в условиях продольного растяжения полимерные цепи располагаются не хаотически, а обладают некоторой степенью ориентации вдоль оси волокна. Отметим, что при формовании волокон из расплава обычными технологическими способами, описанными ранее, практически не удается достичь заметной ориентации и для этого необходим еще один этап — вытягивание в твердом состоянии. Весьма важно, что на морфологию кристаллической фазы, а потому и на свойства образующегося волокна можно влиять чисто механическими (гидродинамическими) средствами. Если заставить полимер кристаллизоваться в условиях интенсивного течения растяжения (элонгационного течения), когда макромолекулы разворачиваются и ориентируются в потоке,

то при кристаллизации образуются не обычные складчатые ламеллярные кристаллы, а своеобразные ориентированные фибриллы, получившие название «шашлычных структур» («shish-kebab»). Электронномикроскопические фотографии этих фибрилл получены в работах А. J. Pennings'a с соавторами (см. например, гл. 3 в сборнике под редакцией А. Ciferri и I. M. Ward'a [1]). В «шашлычной структуре» «шампур» образован кристаллизовавшимися в полностью развернутом состоянии частями макромолекулярных цепей. На «шампур» насажен собственно «шашлык» — ламеллы, образованные частями макромолекул, кристаллизовавшимися в виде складок. При растяжении обычные волокна (в твердом состоянии) имеют, как правило, небольшие разрывные прочности  $\sigma \approx 0.2$  ГПа. В то же время волокна, образованные «шампурами» из развернутых частей макромолекул, имеют  $\sigma = 3 \div 5$  ГПа (формование из раствора и из геля: А. Ciferri и I. M. Ward [1], А. В. Савицкий, И. А. Горшкова, Г. Н. Шмикк и И. Л. Фролова [1], J. Smook и A. J. Pennings [1]; в последней работе формование ведется, фактически, по схеме, близкой к «сухому» методу). Отметим, что ряд исследователей считает, что в формовании сверхпрочных волокон из концентрированных гелей и расплавов макромолекулярные цепи разворачиваются вследствие непосредственного контакта с соседними цепями — растяжения сетки зацеплений (J. Smook и A. J. Pennings [1], А. В. Савицкий, И. А. Горшкова, Г. Н. Шмикк и И. Л. Фролова [1]).

Таким образом, формование волокон в условиях сильного растяжения макромолекулярных клубков позволяет закристаллизовать их в развернутом ориентированном состоянии и получить из них линейные кристаллы — фибриллы, обладающие малым числом дефектов и большой прочностью на разрыв. В формовании из растворов и гелей наряду с традиционным наматыванием на бобину удается использовать элонгационные области течений Куэтта и Пуазейля (см. гл. 3 в сборнике под редакцией А. Ciferri и I. M. Ward'a [1]). Получение сверхпрочных волокон, основанное на кристаллизации макромолекулярных цепей в развернутом состоянии, является в настоящее время одной из важнейших задач технологии. Наряду с рассмотренными здесь способами получения таких волокон из растворов и гелей полимеров, разрабатываются и другие, в которых формируются расплавы и даже полимеры в твердом состоянии (А. Ciferri и I. M. Ward [1]).

### § 3. Теоретические исследования

Основное внимание исследователей привлекало теоретическое предсказание и объяснение причин вариации характеристик получаемых волокон. Практически всегда описание динамики жидкости в волокне велось в квазиодномерном приближе-

нии (S. Kase и T. Matsuo [1], M. A. Matovich и J. R. A. Pearson [1], W. W. Schultz и S. H. Davis [1]). При этом существенно учитывать теплообмен, а иногда также массообмен и химические реакции. В случае ньютоновской жидкости с вязкостью, зависящей от температуры по закону Аррениуса, квазиодномерные уравнения неразрывности и количества движения в волокне имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial fV}{\partial x} &= 0, \quad f = \pi a^2, \\ \frac{\partial P}{\partial x} &= 0, \quad P = 3\mu f \frac{\partial V}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

а уравнением распространения тепла является

$$\rho f C \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V \frac{\partial T}{\partial x} \right) = -2\pi a q_w, \quad \mu = \mu_0 \exp(U/RT). \quad (4.2)$$

Здесь  $x$  и  $t$  — продольная координата в волокне и время;  $f = \pi a^2$  — площадь сечения волокна;  $V$  — продольная скорость жидкости в волокне;  $P$  — продольная сила в сечении волокна;  $T$  — температура;  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $C$  — плотность, вязкость и удельная теплоемкость жидкости;  $q_w$  — тепловой поток в направлении внешней нормали к поверхности волокна;  $\mu_0$  и  $U$  — предэкспоненциальный множитель и энергия активации вязкого течения в законе Аррениуса. Для реологически сложных жидкостей изменится выражение для  $P$ . В большинстве практически важных случаев оправдано сделанное в уравнении количества движения (4.1) допущение о малости сил тяжести, трения о воздух, поверхностного натяжения, а также инерционных эффектов в сравнении с доминирующими вязкими силами. Оправдано также пренебрежение в (4.2) кондуктивным переносом тепла в волокне. Система (4.1), (4.2) не учитывает процессов кристаллизации, идущих в охлаждаемом волокне, упругих и ориентационных эффектов. Тем не менее на ее основе может быть исследован по крайней мере качественно ряд важных явлений распространения возмущений по формуемому волокну и возникновения неустойчивости — «резонанса при вытягивании». Поправки, вносимые реологически сложным поведением жидкости, будут рассматриваться по ходу изложения.

M. A. Matovich и J. R. A. Pearson [1], рассматривая изотермическое формование ньютоновской жидкости с заданной скоростью на приемной бобине, получили важное стационарное решение, используемое при исследовании устойчивости:  $V/V_1 = a_1^2/a^2 = E^{x/L-1}$  ( $L$  — длина волокна от фильеры до бобины, значения величин в точке контакта с которой отмечены индексом 1,  $E$  — введенная ранее кратность вытяжки). Это решение было обобщено на случай изотермического формования степенной жидкости в работе C. D. Han'a, R. R. Lamonte'a и Y. T. Shah'a [1]. С помощью численных расчетов решение для ньюто-

новской жидкости было обобщено в работе У. С. Раек'а и Р. В. Пунк'а [1] на неизотермический случай. В большинстве систем энергия активации вязкого течения в законе Аррениуса велика,  $\theta = U/RT_0 \gg 1$  ( $T_0$  — максимальная температура в волокне; скажем, при формовании из фильеры — температура на ее срезе). Это позволяет (А. Л. Ярин [5]) использовать метод разложения экспоненты Д. А. Франк-Каменецкого, развитый в теории горения, и получить на основе (4.1) и (4.2) аналитическое решение задачи о стационарном формовании волокон, вытягиваемых как из фильеры, так и из нагреваемой заготовки. Эти решения непосредственно применимы к процессу формования стекловолокон (жидкое стекло — ньютоновская жидкость) и легко обобщаются на случай двухслойных стекловолокон. С увеличением  $\theta$  при фиксированных значениях  $V_0$  и  $V_1$  утоньшение волокна на участке от фильеры до бобины происходит быстрее, продольная сила  $P$  возрастает.

В ряде работ изучалось стационарное формование упруговязких жидкостей. При этом, однако, возникают трудности, связанные с необходимостью рассмотрения весьма быстрой вытяжки элемента материала до очень большой деформации. Далекое не всякая реологическая модель позволяет адекватно описать этот процесс. Поэтому и имеющиеся теоретические выводы должны восприниматься с осторожностью. Так, согласно работе М. М. Денп'а, С. J. S. Petrie и Р. Avenas'а [1], получивших стационарное решение для формования волокон вязкоупругой максвелловской жидкости, рост безразмерного времени релаксации  $\theta_1 = \lambda V_0/L$  ( $\lambda$  — время релаксации жидкости) при фиксированных скоростях ведет к ускорению утоньшения волокна и к резкому увеличению силы  $P$ . Это решение однако предсказывает появление бесконечно большой продольной силы в волокне при определенном значении  $\theta_1$ , уменьшающемся с ростом кратности вытяжки  $E$ . Этот физически нереальный результат является следствием того, что максвелловская модель неверно описывает поведение жидкости при очень больших скоростях деформации (см. обзор М. М. Денп'а [1]). Обобщение стационарного решения на случай формования максвелловской жидкости с вязкостью, изменяющейся по степенному закону (модель Уайта—Метцнера), данное в работе Р. J. Fisher'а и М. М. Денп'а [1], страдает тем же дефектом. В работе D. K. Gagon'а и М. М. Денп'а [1] с помощью численных расчетов получено стационарное решение для случая формования волокна вязкоупругой жидкости Фан Тьена, в которой скорость релаксации растет с ростом продольных напряжений (нелинейноупругое упрочнение жидкости). Учитывались силы инерции, веса, трения о воздух, а также зависимость вязкости и времени релаксации от температуры, которая определялась с помощью решения уравнения распространения тепла. Кроме того, считалось, что по достижении температуры затвердевания жидкость

превращается в абсолютно твердое тело и далее вплоть до приемной бобины не деформируется. Полученные решения удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными и позволяют выявить влияние различных факторов на изменение характеристик волокна на участке от фильеры до бобины. Приведенные результаты не позволяют установить, исключает ли использованная реологическая модель физически нереальное ограничение области значений времени релаксации, создаваемое максвелловской моделью. Обзор различных решений для стационарного формования в сравнении с экспериментом дан в работе М. М. Денп'а [1].

В расчетах неизотермического формования теплообмен волокна (а также трение) с окружающей средой описывается не только с использованием эмпирических соотношений (как в работе Д. К. Гагон'а и М. М. Денп'а [1]), но и с помощью решений уравнений пограничного слоя, построенных интегральными методами (см. например, работу А. Л. Ярина [6]).

Решения, описывающие стационарные конфигурации волокон, важны как сами по себе, так и в качестве основы для теоретического исследования неустойчивости формования. Центральный результат здесь получен в работе J. R. A. Pearson'а и М. Matovich'а [1], где исследована в линейном приближении по отклонениям от стационарного решения динамика изотермического формования «волокна» ньютоновской вязкой жидкости. Рассматривались как режимы с заданной силой ( $P = P_0 = \text{const}$ ), так и режимы с фиксированной скоростью на приемной бобине ( $V_1 = \text{const}$ ). Оказалось, что при кратностях вытяжки  $E$ , превышающих критическое значение  $E_* = 20,22$ , стационарное решение неустойчиво по отношению к возмущениям сечения струи.

Чтобы понять физическую причину неустойчивости, запишем для возмущения сечения струи интегро-дифференциальное уравнение с запаздыванием (В. С. Берман и А. Л. Ярин [1])

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{E \ln^2 E}{E-1} \int_0^{(E-1)/\ln E} [\zeta(t) - \zeta(t-\tau)] Y(E, \tau) d\tau, \quad (4.3)$$

$$Y(E, \tau) = \frac{2}{(E-\tau \ln E)^2} - \frac{1}{(E-\tau \ln E)^3}.$$

Здесь  $\zeta$  — возмущение сечения индивидуальной жидкой частицы в волокне. Уравнение (4.3) показывает, что изменение сечения жидкой частицы определяется суперпозиций возмущений сечений всех остальных частиц волокна, причем весовая функция  $Y$ , соответствующая каждой частице, определяется стационарным значением толщины волокна в том месте, где находится эта частица. Исследование характеристического уравнения, соответствующего уравнению с запаздыванием (4.3), показывает, что (4.3) имеет растущие со временем решения при  $E >$

$\rightarrow E_* = 20.22$ . Из (4.3) видно, что возникновение неустойчивости обусловлено в основном, областью наиболее тонких сечений в конце волокна (бóльшие значения весовой функции  $Y$ ). Если эта область имеет достаточную протяженность вдоль волокна (при  $E < E_*$ ), то влияния на рассматриваемую жидкую частицу от различных участков области в конце волокна интерферируют, и неустойчивость не возникает. При  $E > E_*$  для возмущений с длиной волны порядка длины волокна подобная интерференция невозможна (область тонких сечений слишком коротка, чтобы волна могла изменить знак на ее длине), и возникает неустойчивость. Коротковолновые возмущения всегда безопасны. Отметим, что имеются и другие способы определения границы устойчивости: D. Gelder [1], S. Kase [1], J. C. Hyun [1].

Границы области устойчивости в случае формирования ньютоновской вязкой и степенной жидкостей с учетом инерционной, гравитационной и поверхностной сил определяли в своих работах Y. T. Shah и J. R. A. Pearson [3], J. R. A. Pearson и Y. T. Shah [1, 2], C. D. Han, R. R. Lamonte и Y. T. Shah [1], J. C. Hyun [2] и J. C. Chang, M. M. Denn и F. T. Geyling [1]. Значениям показателя степени  $n < 1$  в степенном законе отвечают критические значения  $E < 20.22$ , а в случае дилатантного упрочнения жидкости ( $n > 1$ ) критическое значение  $E$  превосходит 20.22. Обращает на себя внимание резкое увеличение устойчивости волокон даже при незначительной дилатансии жидкости. J. R. A. Pearson, Y. T. Shah и R. D. Mhaskar [1] при исследовании устойчивости формирования волокон степенных жидкостей учли затвердевание волокна при некотором значении температуры, после чего оно ведет себя как упругое тело. Было показано, что при этом критическая кратность вытяжки волокна псевдопластической жидкости резко увеличивается, а в случаях ньютоновского и дилатантного поведения жидкости вообще обеспечивается устойчивость формирования. Этот результат согласуется с экспериментальными данными (см. § 1 данной главы).

Специальный учет затвердевания волокна при исследовании устойчивости не является обязательным. Достаточно сильное падение температуры вдоль волокна при резкой зависимости вязкости от температуры приводит к столь большим значениям вязкости, что жидкое волокно эффективно ведет себя как твердое тело — деформация практически прекращается. Значение кратности вытяжки, отвечающее возникновению «резонанса при вытягивании» увеличивается с ростом безразмерной энергии активации вязкого течения в законе Аррениуса  $\theta$ : для  $\theta = 7 \div 10$  критическое значение  $E = 60 \div 100$  (А. Л. Ярин [6], Y. Demay и J. F. Agassant [1]). Область существования устойчивых решений расширяется также с усилением отвода тепла от волокна (J. R. Pearson и Y. T. Shah [1], Y. T. Shah и J. R. A. Pearson [1, 2], R. J. Fisher и M. M. Denn [2]). Все это

делает актуальным изучение отклика характеристик процесса на внешние возмущения. Характеристики усиления возмущений радиуса волокон, формуемых в неизотермических условиях, рассчитаны в работах J. C. Changa, M. M. Denn'a и S. Kase [1] и А. Л. Ярина [6]. В последней работе показано, что на умеренных частотах (длина волны порядка длины волокна) рост вязкости при охлаждении формуемого волокна ведет к заметному уменьшению коэффициента усиления амплитуды отклика выходного сечения волокна на внешние возмущения. Высокочастотные возмущения допускают полное исследование асимптотическими методами. Они быстро затухают по мере распространения к приемной бобине.

Менее адекватны, по-видимому, модели, в которых для упрощения предполагается, что задано переменное по длине волокна распределение вязкости и не зависящие от динамического решения вариации этого распределения (F. T. Geyling [1] и В. Л. Колпашиков, О. Г. Мартыненко и А. И. Шнип [1]).

Работы R. J. Fisher'a и M. M. Denn'a [1] и J. C. Hyun'a [2] посвящены определению границ устойчивости в случае формирования вязкоупругой максвелловской жидкости с вязкостью, определяемой степенным законом. Теория предсказывает потерю устойчивости формуемого волокна псевдопластического поведения при  $E < E_* = 20.22$ , а в случае дилатантного поведения — при  $E > E_*$ . Критическое значение кратности вытяжки практически не зависит от модуля сдвиговой упругости жидкости. При дальнейшем увеличении  $E$  теория предсказывает для фиксированного модуля появление еще одной области устойчивости  $20.22 \ll E_{*1} < E < E_{*2}$ . При  $E = E_{*2}$  продольная сила в волокне становится равной бесконечности, а кратности вытяжки  $E > E_{*2}$  — недопустимы. Этот результат всецело связан с обсуждавшимся ранее дефектом стационарного решения M. M. Denn'a С. J. S. Petrie и P. Avenas'a [1], обусловленным выбором реологической модели жидкости. Поэтому предсказание высокоскоростной области устойчивости изотермически формуемого волокна вязкоупругой жидкости вызывает сильные сомнения. Отметим, что согласие с экспериментом С. В. Weinberger'a, G. F. Cruz-Saenz'a и G. J. Donnelly [1] в предсказании снижения порога возникновения «резонанса при вытягивании» для вязкоупругой жидкости по сравнению со значением  $E = E_* = 20.22$  для ньютоновской жидкости связано исключительно с заложенным в рассматриваемой работе в реологическую модель псевдопластическим падением вязкости со скоростью растяжения.

При увеличении кратности вытяжки после потери устойчивости по волокну начинают распространяться самоподдерживающиеся волны расширения — сжатия его сечения. Н. Ishihara и S. Kase [1] первыми подметили, что «резонанс при вытягивании», фактически, представляет собой автоколеба-



тельный режим и продемонстрировали это, численно решив уравнения (4.1) в случае изотермического формирования волокна ньютоновской жидкости с заданной скоростью на приемной бобине. После некоторого периода установления в выходном сечении волокна возникают периодические во времени колебания его сечения. Вблизи порога потери устойчивости при  $E - E_* = O(\epsilon)$  ( $\epsilon \ll 1$ ) в случае формирования с заданной скоростью на приемной бобине уравнения (4.1) удается решить асимптотически (А. Л. Ярин [8]). В результате оказывается, что автоколебания возбуждаются мягко (при  $E > E_*$ ), а их амплитуда нарастает как  $\sqrt{E - E_*}$ . Численное исследование поведения решения в закритической области (вплоть до  $E = 700$ ) показывает, что оно сохраняет автоколебательный характер и дальнейших бифуркаций не происходит. В неизотермическом случае, если расстояние от фильеры до бобины невелико, при достаточно больших значениях  $E$  также сохраняются автоколебания выходного сечения волокна, о чем свидетельствуют численные исследования (А. Л. Ярин [6]).

Отметим, что все указанные результаты не позволяют исследовать явление обрыва волокна, описание которого требует усовершенствования модели (4.1) — (4.2).

«Мягкое» изотермическое формирование ньютоновской жидкости, когда фиксирована сила  $P$ , растягивающая волокно, всегда устойчиво (J. R. A. Pearson и M. Matovich [1]). В этом случае удается найти точное решение, описывающее эволюцию начального возмущения, в частности, скачка сечения нити (В. С. Берман и А. Л. Ярин [1]).

Одномерная теория (4.1) — (4.2) заведомо не в состоянии описать детали течения в непосредственной окрестности фильеры, а также учесть более подробно распределение скоростей (а в полимерных жидкостях — напряжений и упругих деформаций) на выходе из фильеры. В большинстве случаев это допустимо. Однако имеются экспериментальные данные, показывающие некоторое влияние сдвиговой предыстории течения в фильере на стационарные характеристики волокна и возникновение автоколебаний (С. D. Han и Y. W. Kim [1], J. Mewis и G. De Cleyn [1]). Теоретическое исследование этого сложного вопроса в настоящее время только начинается: с помощью численного метода конечных элементов построено стационарное решение для формирования ньютоновской жидкости с учетом перехода от паузейлева течения в фильере к элонгационному в волокне (W. A. Gifford [1]). В таких расчетах имеет смысл использовать наряду с уравнениями Навье—Стокса специальные уравнения для струй и нитей типа уравнений пограничного слоя (К. М. Магомедов [1]). Фактически, этот вопрос близок к задачам, рассмотренным в § 1 главы 1, но значения параметров в данном случае совершенно иные.

В ряде работ теоретически исследуются различные аспекты кристаллизации и ориентации полимерных макромолекул в процессах формирования волокон. Отметим работу К. Nakamura, Т. Watanabe, Т. Amano и К. Katayama [1], которые присоединили к балансным уравнениям типа (4.1) и (4.2) кинетическое уравнение кристаллизации и рассчитали степень кристалличности в формуемом волокне.

Иногда в качестве упрощенной модели формуемых волокон рассматриваются жидкие нити, подвергаемые двустороннему одноосному растяжению. В невозмущенном состоянии движение жидкости в таких нитях не зависит от продольной координаты, что является существенным упрощением (и отличием) в сравнении с процессом формирования. Однако такое движение соответствует течению растяжения и сохраняет ряд специфических черт, характерных для волокон. Y. Ide и J. L. White [1, 2] исследовали в такой постановке прядимость полимерного расплава, рассматривая устойчивость нити вязкоупругой жидкости, растягиваемой с постоянной скоростью деформации (см. также работу D. Acierno, F. P. La Mantia, G. Iorio и G. Maggucchi [1]). Влияние степенного реологического поведения жидкости, сил веса и поверхностного натяжения на растяжение нити исследовали S. Kase, Т. Nomura и М. Yamamoto [1].

## Глава 5

### СВОБОДНЫЕ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ

Двумерным аналогом свободных струй являются свободные пленки жидкости, т. е. тонкие слои жидкости, движущиеся в малосопротивляющейся среде, так что касательными напряжениями на поверхности пленки можно пренебречь. В силу этого скорость практически постоянна по толщине пленки, в чем состоит кардинальное отличие свободных пленок от тонких пленок, движущихся по поверхности твердого тела. Последнему случаю посвящена обширная литература (напр., С. С. Кутателадзе и М. А. Стырикович [1], З. П. Шульман и В. И. Байков [1]). В данной главе рассматриваются исключительно свободные пленки.

#### § 1. Общие уравнения. Стационарные динамические конфигурации свободных пленок

Общие уравнения динамики пленки естественно строить в собственной системе координат  $\theta^i$  ( $i=1, 2$ ), связанной со срединной поверхностью пленки, рассматриваемой как двумерный материальный континуум. В результате имеем (В. М. Ентов [3, 6], А. Е. Green и Р. М. Naghdi [1])

$$\begin{aligned} \rho^*_{,t} + (\rho^* W^{\beta})_{,\beta} &= 0, \quad (\beta = 1, 2), \\ (\rho^* \mathbf{V})_{,t} + (\rho^* W^f \mathbf{V})_{,\beta} &= \mathbf{P} + \mathbf{N}^{\beta}_{,f}, \\ \rho^* &= \rho h a^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь  $\rho^*$  — поверхностная плотность массы пленки,  $h$  — толщина пленки,  $\mathbf{V}$  — вектор скорости жидкости,  $W^{\beta}$  — относительная скорость жидкости,  $\mathbf{P}$  — плотность внешних усилий, приложенных к пленке,  $\mathbf{N}^{\beta}$  — вектор плотности внутренних сил в пленке на «разрезе» вдоль линии  $\theta^{\beta} = \text{const}$ ,  $a$  — площадь единичного элемента в выбранной системе координат  $\theta^1, \theta^2$ . Векторы  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{N}^{\beta}$  — определенные на поверхности трехмерные векторы; за третье координатное направление берется нормаль к срединной поверхности пленки.

Система (5.1) замыкается уравнением эволюции срединной поверхности и реологическим соотношением, связывающим вектор  $\mathbf{N}^{\beta}$  (или тензор напряжений на поверхности  $N^{\beta\delta}$ ) с кинематикой.

Если движение в пленке стационарно, то  $\mathbf{V} = \mathbf{W}$ , а систему координат можно выбрать неподвижной. Тогда в покомпонентной записи (5.1) дает

$$\begin{aligned} (\rho^* V^f)_{,\beta} &= 0, \\ \rho^* V^f V^{\gamma}_{,\beta} + \rho^* V^f V^{\delta} \Gamma^{\gamma}_{\beta\delta} &= P^{\gamma} + N^f_{,\beta}{}^{\gamma} + N^{\beta\delta} \Gamma^{\gamma}_{\beta\delta}, \\ \rho^* V^f V^{\gamma} b_{f\gamma} &= P + N^f{}^{\gamma} b_{f\gamma}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь  $\Gamma^{\gamma}_{\beta\delta}$  — символы Кристоффеля,  $b_{\beta\gamma}$  — тензор кривизны,  $P$  и  $P^{\beta}$  — нормальная и касательные компоненты вектора внешних усилий, запятой обозначена производная по соответствующей координате.

При построении двумерного варианта замыкающего реологического соотношения явно учитывается тонкость пленки. В результате, например, для вязкой жидкости, имеем

$$\begin{aligned} N^{\beta\delta} &= \sigma^{\beta\delta} h a^{1/2} + 2a^{1/2} \alpha a^{\beta\delta}, \\ \sigma^{\beta\delta} &= -p a^{\beta\delta} + 2\mu D^{\beta\delta}, \\ p &= \alpha h_{,\beta\gamma} a^{\beta\gamma} + 2\mu h^{-1} (h_{,t} + h_{,\beta} W^{\beta}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь  $\alpha$  — поверхностное натяжение,  $\mu$  — вязкость,  $a^{\beta\delta}$  — метрический тензор,  $D^{\beta\delta}$  — двумерный тензор скоростей деформации в пленке (см. подробности в работах В. М. Ентова [3; 6]).

До настоящего времени рассматривались лишь стационарные свободные жидкие пленки (плоские и осесимметричные), малые возмущения пленок относительно стационарных конфигураций, либо простейшие симметричные нестационарные движения.

Стационарные свободные пленки капельных жидкостей в условиях эксперимента создаются, как правило, при соударении тонких струй с мишенью—препятствием или с противоположенной струей (G. Taylor [2], J. C. P. Huang [1], В. М. Ентов, Х. С. Кестенбойм, А. Н. Рожков и Л. И. Шарчевич [1]). Жидкость растекается по мишени и срывается с нее в виде пленки, которая в своем дальнейшем движении приобретает характерную форму колокольчика (кольцевой струи; см. рис. 12). В нижней части пленка либо разрушается, либо схлопывается вновь, образуя струю. Форма пленки определяется конкуренцией инерционных сил с силами поверхностного натяжения, веса и внутренними напряжениями в жидкости. Поэтому

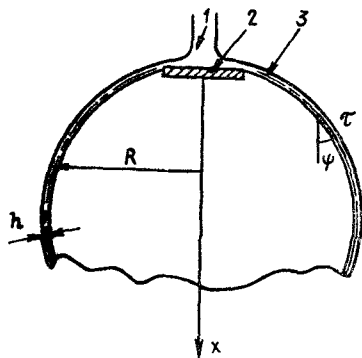


Рис. 12. Колоколообразная жидкая пленка 3, образованная при соударении струи 1 с мишенью 2

по форме пленки можно судить о действующих в ней напряжениях, и она потенциально представляет собой средство исследования реологического поведения жидкости при быстрой деформации.

Основные идеи в теоретическом и экспериментальном исследовании жидких пленок восходят к работам G. Taylor'a [2—4], который рассчитал и сопоставил с экспериментом форму кольцевой струи идеальной жидкости, изучил распространение возмущений по плоской тонкой пленке и условия ее разрушения.

Если допускается существование в жидкости внутренних напряжений, отличных от изотропного давления, то по аналогии с уравнениями Тейлора для стационарной осесимметричной кольцевой пленки, в которой жидкость движется вдоль образующей, имеем (В. М. Ентов, Х. С. Кестенбойм, А. Н. Рожков, Л. И. Шарчевич [1])

$$2\pi\rho R h V_{\tau} = Q,$$

$$\rho \frac{d}{ds} (V_{\tau}^2 R h) = \frac{d}{ds} (\sigma_{\tau\tau} R h) - \sigma_{\theta\theta} h \sin \psi + \xi \rho R h \cos \psi,$$

$$(\rho V_{\tau}^2 R h - \sigma_{\tau\tau} R h - 2\alpha R) \frac{d\psi}{ds} = -(\sigma_{\theta\theta} h + 2\alpha) \cos \psi - g \rho R h \sin \psi,$$

$$\frac{dx_1}{ds} = \cos \psi, \quad \frac{dR}{ds} = \sin \psi. \quad (5.4)$$

Здесь первое уравнение выражает сохранение расхода в пленке, второе и третье — баланс количества движения вдоль образующей и по нормали к ней, четвертое и пятое — геометрические соотношения;  $\rho$  и  $\alpha$  по-прежнему обозначают плотность и коэффициент поверхностного натяжения жидкости;  $V_{\tau}$  — скорость жидкости вдоль образующей пленки;  $R$  — радиус образующей;  $h$  — толщина пленки;  $s$  и  $x$  — координаты, отсчитываемые вдоль образующей и вдоль оси симметрии;  $\psi$  — угол между касательной к образующей и осью симметрии;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\sigma_{\tau\tau}$  и  $\sigma_{\theta\theta}$  — продольное и азимутальное напряжения в пленке, определяемые с помощью реологического соотношения жидкости.

Если положить здесь  $\sigma_{\tau\tau} = \sigma_{\theta\theta} = -p = 0$ ,  $g = 0$ , то получим уравнения Тейлора, интегрирование которых дает

$$V_{\tau} = V_0 = \text{const},$$

$$X = \cos \psi_0 \{ \text{Arch}(\sec \psi_0) - \text{Arch}[(1 - Y) \sec \psi_0] \}, \quad (5.5)$$

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{R}{L}, \quad L = \frac{QV_0}{4\pi\alpha}.$$

Соотношение (5.5) определяет форму пленки при  $0 < X < \sqrt{2} \cos \psi_0 \text{Arch}(\sec \psi_0)$  (считается, что при  $X = 0$   $\psi = \psi_0$ ,  $R = 0$ ;  $0 < \psi_0 < \pi/2$ ). Максимальный радиус пленки  $Y = 1 - \cos \psi_0$  достигается при  $X = \cos \psi_0 \text{Arch}(\sec \psi_0)$ . Теоретические результаты, полученные на основе уравнений (5.4), удовлетворительно соответствуют экспериментальным данным о формах кольцевых пленок маловязких жидкостей (G. Taylor [2], M. A. Hoffman, R. K. Takahashi и R. D. Moxson [1]).

В работе В. М. Ентова, X. С. Кестенбойма, А. Н. Рожкова и Л. И. Шарчевич [1] с использованием уравнений (5.4) решение G. Taylor'a [2] обобщено на случай умеренно-вязких и вязкоупругих жидкостей. Сравнение результатов расчетов и результатов экспериментов с пленками разбавленных ( $\sim 0.05\%$ ) водных растворов ПОЭ и полиакриламида позволило показать, что в жидкости развиваются значительные добавочные азимутальные напряжения ( $\sigma \sim 10^3$  Н/м<sup>2</sup>) упругого происхождения, проявляющиеся в уменьшении максимального радиуса пленки.

Заметное влияние на форму колоколообразной жидкой пленки воды может оказывать даже незначительное превышение давления воздуха внутри нее  $p_-$  по сравнению с давлением снаружи  $p_+$  (см. например работы А. К. Казенкова, Ю. Н. Каллистова, В. П. Карликова и Г. И. Шоломовича [1], В. Е. Епихина [1, 3]). Этот эффект учитывается добавлением члена

$R(p_- - p_+)$  в правую часть третьего уравнения (5.4). Влияние закрутки колоколообразной жидкой пленки (кольцевой струи), а также трения о воздух на ее форму исследовано в работах В. Е. Епихина [2, 3], В. Е. Епихина и В. Я. Шкадова [3] и Г. А. Баранова и В. В. Хухарева [1]. В последней работе рассчитан теоретически и наблюдался экспериментально интересный эффект: в результате конкуренции поверхностной и центральной сил образующая срединной поверхности закрученной кольцевой струи представляет собой осциллирующую кривую.

Динамика расширения тонкой сферической пленки рассмотрена в работах В. М. Ентова [3] и Чыонг За Биня [1].

В приложениях большое значение имеют раздуваемые изнутри пленки вязкоупругих жидкостей и связанные с ними задачи. Широкое распространение приобрел технологический процесс получения пленок экструзией с раздувом (С. D. Han [1]), в котором кольцевая струя вязкоупругой жидкости при продольном растяжении, подобном рассмотренному в главе 4 формованию волокон, раздувается воздухом изнутри. Иногда процесс ведется и без вдувания воздуха. В этом процессе удается получать пленки, ориентированные как в продольном, так и в азимутальном направлениях. Результаты расчетов и экспериментов, касающихся пленочных течений вязкоупругих жидкостей такого типа, привели в своих работах С. D. Han [1] и S. Middleman [1], а также J. R. A. Pearson и С. J. S. Petrie [1, 2], R. K. Gupta, A. V. Metzner и K. F. Wissbrun [1] и M. E. Ryan и A. Dutta [1, 2]. Последние две работы выполнены применительно к процессу литья с раздувом, в котором раздувается трубка жидкого полимера внутри формы.

В ряде работ рассматриваются пленки, вытекающие из плоской щели (плоские струи), срединная поверхность которых плоская. Построены решения, описывающие утоньшение (или утолщение) таких пленок при движении в направлении силы тяжести, влияние начального профиля скорости и реологической сложности в частности, вязкоупругости, жидкости (М. И. Гуревич [1], В. Я. Шкадов, Л. П. Холпанов, В. Е. Епихин, Н. С. Мочалова, В. А. Малюсов и Н. М. Жаворонков [1], Y. Miyake, E. Mukai и Y. Iemoto [1], В. И. Елисеев [4], В. М. Шаповалов и Н. В. Тябин [1, 2], L. D. Sturges [1], K. Takahashi [1], M. J. Crochet и R. Keunings [1]). Утолщение плоской жидкой пленки под действием вязкого трения со стороны несмешивающейся жидкости, в которой она распространяется, рассчитано интегральным методом теории пограничного слоя в работе А. Л. Генкина, В. И. Кукеса и Л. П. Ярина [1], а утолщение вследствие большой вязкой диссипации в самой пленке рассчитано численно в работах В. J. Omodei [1] и А. Dutta и M. E. Ryan'a [1]. Жидкость, подаваемую через плоскую щель, в ряде случаев формируют как волокна (см. главу 4) с целью получения тонких ориентированных пленок. В случае ньютонов-

ской жидкости этот процесс описывается уравнениями (4.1), причем  $f$  обозначает теперь толщину пленки, а  $P=4\mu f \partial V/\partial x$ . Стационарное решение дается как и в случае формирования волокон выражениями  $V/V_1=f_1/f=E^{x/L-1}$  ( $V_1$  и  $f_1$  — скорость и толщина пленки на приемном устройстве,  $L$  — расстояние от щели до приемного устройства,  $E=V_1/V_0$ ,  $V_0$  — скорость подачи жидкости.).

## § 2. Свободные ребра на жидких пленках

Если на неподвижной жидкой пленке возникает свободный край (скажем, вследствие ее разрыва), то силы поверхностного натяжения, стремящиеся сократить свободную поверхность, приводят жидкость на краю пленки в движение. Образовавшееся утолщение — валик движется по пленке, вбирая в себя все новые порции жидкости из пленки и увеличиваясь в размере. Стационарную скорость движения такого свободного ребра — валика вычислил G. Taylor [3]. В случае идеальной жидкости она равна  $V_*=\sqrt{2\alpha/(\rho h)}$ . На движущейся пленке свободное ребро будет устанавливаться там, где скорость жидкости по нормали к нему равна  $V_*$ . Так, например, на дискообразной пленке, образованной соударением струи воды с плоской мишенью радиуса  $r_0$  свободное ребро будет устанавливаться при значении полярного радиуса  $r_*=\rho h_0 V_0^2 r_0/(2\alpha)$  (см. рис. 13,а), где

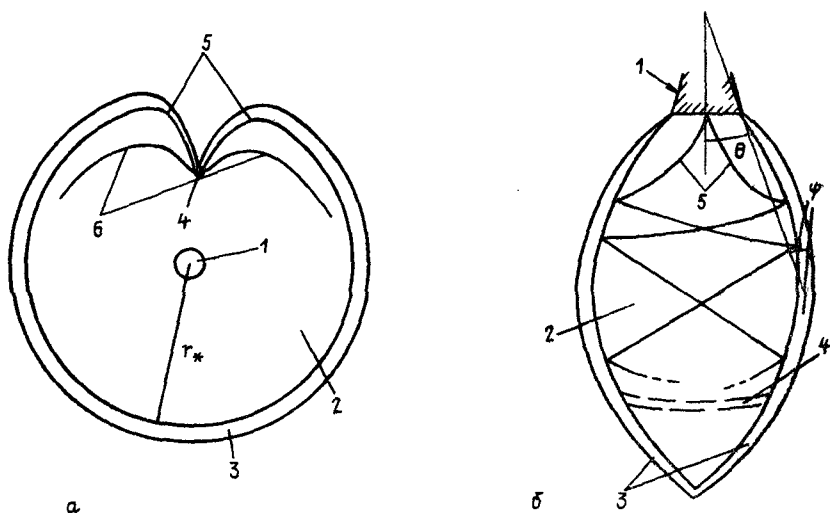


Рис. 13. Свободные ребра на жидких пленках:

а — 1 — струя, создающая пленку при соударении с мишенью, 2 — дискообразная пленка (поле скоростей радиально), 3 — внешнее кольцевое свободное ребро, 4 — проволока, разрывающая пленку, 5 — «радиальные» свободные ребра, 6 — волны изгибных возмущений; б — 1 — щелевой насадок, 2 — пленка, 3 — свободные ребра, 4 — возможное положение кольцевого свободного ребра, 5 — волны изгибных возмущений

$h_0$  — начальная толщина пленки, а  $V_0$  — скорость жидкости в пленке в радиальном направлении (G. Taylor [3]). Это свободное ребро в форме валика, представляющее собой столб жидкости, согнутый в кольцо, неустойчиво в соответствии с механизмом капиллярного распада Релея, и от него постоянно отрываются капли. При стационарном поле скоростей в пленке свободное ребро на ней также стационарно и его легко наблюдать визуально. На рис. 13,а схематически изображена также форма двух свободных ребер, образующихся при разрыве дискообразной пленки проволочкой (G. Taylor [3]), а на рис. 13,б — форма свободных ребер на пленке, создаваемой при истечении жидкости из щелевого насадка; срединная поверхность пленки плоская (G. D. Crapper, N. Dombrowski и G. A. D. Pyott [1]). В последнем случае возможна ситуация, в которой до своего смыкания «радиальные» свободные ребра встречаются с кольцевым свободным ребром. Отметим, что свободные ребра не влияют на поле скоростей в пленке, так как течение в ней является «сверхзвуковым» — скорость течения превосходит скорость распространения изгибных возмущений по пленке (G. Taylor [3]).

Форма свободного ребра на краю пленки определяется конкуренцией инерционных, поверхностных сил и внутренних напряжений в ребре и пленке. Для случая «радиального» свободного ребра на дискообразной пленке идеальной жидкости балансные уравнения в нем даны в работе G. Taylor'a [3]. При выводе этих уравнений предполагается, что течение жидкости в ребре квазиодномерно — характеристики течения (например, скорость) по сечению ребра неизменны. Уравнения «радиального» свободного ребра легко обобщаются на случай произвольных реологии жидкости и поля скоростей в пленке, приобретая вид

$$\begin{aligned} \frac{dV_{\xi} f}{dr} &= h (V_r \operatorname{tg} \psi + V_\theta), \\ \rho \frac{dV_{\xi}^2 f}{dr} &= \rho h (V_r \operatorname{tg} \psi + V_\theta) (V_r \cos \psi - V_\theta \sin \psi) + \\ &+ h \left[ \frac{1}{2} \sin 2\psi (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) - \sigma_{r\theta} \cos 2\psi \right] \frac{1}{\cos \psi}, \\ \rho V_{\xi}^2 f \left( \frac{d\psi}{dr} - \frac{d\theta}{dr} \right) &= - \frac{\rho h}{\cos \psi} (V_r \sin \psi + V_\theta \cos \psi)^2 + \\ &+ \frac{h}{\cos \psi} (\sigma_{rr} \sin^2 \psi + \sigma_{\theta\theta} \cos^2 \psi + \sigma_{r\theta} \sin 2\psi) + \frac{2\alpha}{\cos \psi}, \quad (5.6) \\ \frac{d\theta}{dr} &= - \frac{1}{r} \operatorname{tg} \psi. \end{aligned}$$

(обобщение дано авторами совместно с А. Н. Рожковым и У. Ф. Фейзхановым). В уравнениях (5.6)  $r$  и  $\theta$  — полярные радиус и угол (см. рис. 13,б);  $V_{\xi}$  — скорость жидкости вдоль



свободного ребра;  $\psi$  — острый угол между полярным радиусом и касательной к свободному ребру;  $V_r$  и  $V_\theta$  — радиальная и азимутальная компоненты скорости в пленке на границе с ребром;  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{r\theta}$  — компоненты тензора напряжений в пленке на границе со свободным ребром, определяемые реологическим соотношением жидкости и условием отсутствия нормальных напряжений на поверхности пленки.

В силу уравнений (5.6) форма свободного ребра на краю пленки дает информацию о внутренних напряжениях в пленке.

### § 3. Рост возмущений на свободных пленках и их разрушение

По свободным пленкам могут распространяться два типа возмущений: изгибные возмущения и возмущения толщины. В первом из них обе поверхности пленки искривляются синфазно, а во втором в противофазе. G. Taylor [3] показал теоретически и экспериментально, что изгибные возмущения по пленке идеальной жидкости распространяются со скоростью  $\sqrt{2\alpha/(\rho h)}$ , не зависящей от длины волны, то есть без дисперсии в отличие от возмущений толщины (см. также книгу G. B. Witham'a [1]). На пленке со стационарным полем скоростей можно наблюдать стационарную картину изгибных волн возмущений. В случае дискообразной радиально растекающейся пленки идеальной жидкости малые изгибные волны, источником которых служит край мишени, удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} \rho r_0 h_0 \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial r} + V_0^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right) = \\ = 2\alpha \left( r \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right), \end{aligned} \quad (5.7)$$

а их форма в стационарном случае соответствует его характеристикам — кардиоидам

$$\theta = \theta_0 \pm \arcsin \left( \frac{2r}{r_*} - 1 \right) \mp \arcsin \left( \frac{2r_0}{r_*} - 1 \right), \quad r_* = \rho V_0^2 h_0 r_0 / (2\alpha). \quad (5.8)$$

Здесь  $r_0$  — радиус мишени;  $h_0$  — толщина пленки на сходе с мишени;  $V_0$  — радиальная скорость жидкости на сходе с мишени и в пленке;  $\theta_0$  — полярный угол источника возмущения на краю мишени;  $\chi$  — амплитуда возмущения. Форма волн возмущений показана линиями 6 на рис. 13а и линиями 5 на рис. 13б.

Значительный интерес представляет собой вопрос о том, как волны возмущений влияют на разрушение жидкой пленки. Если для достаточно малых значений скорости в дискообразной пленке (число Вебера  $We = \rho V_0^2 d / \alpha \ll 10^3$ ,  $d$  — диаметр струи, создающей пленку) эксперимент подтверждает, что ее разрушение происходит при  $r = r_*$  ( $r = 0.167 \cdot \frac{1}{2} d \cdot We$ ), т. е. обусловлено возникновением кольцевого свободного ребра и ростом амплитуды кардиоидальных изгибных возмущений, то при даль-

нейшем увеличении скорости пленка начинает уменьшаться. Этот факт установлен в работе J. C. P. Huang'a [1] (см. также монографию Ю. Ф. Дитякина, Л. А. Клячко, Б. В. Новикова и В. И. Ягодкина [1]). На пленке появляются бегущие изгибные кольцевые волны, генерируемые динамическим действием воздуха, подобно тому, как это имеет место для высокоскоростных струй жидкости, рассмотренных в § 1 главы 3. Первая теоретическая модель таких волн была предложена в работе Н. В. Squire'a [1], в которой исследовалась устойчивость плоского слоя идеальной жидкости. В длинноволновом пределе ( $kh_0 \ll 1$ ), который практически всегда справедлив для свободных пленок, изгибные возмущения такого слоя в неподвижной относительно покоящегося на бесконечности воздуха системе отсчета удовлетворяют уравнению

$$\rho h_0 \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial t} + V_0^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right) = 2\alpha \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{2\rho_1}{k} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \quad (5.9)$$

( $x$  — отсчитывается вдоль срединной плоскости невозмущенного слоя), а характеристическим уравнением будет

$$\rho (\omega - V_0 k)^2 \frac{kh_0}{2} = \alpha k^3 - \rho_1 \omega^2. \quad (5.10)$$

Переходя в систему отсчета, связанную с невозмущенной пленкой, находим из (5.10) скорость роста амплитуды волны  $\omega_1$  ( $\omega_1 = \omega - kV_0$ )

$$i\omega_1 = \pm \sqrt{2k \frac{\rho_1 V_0^2}{\rho h_0} - \frac{2\alpha}{\rho h_0} k^2} \quad (\rho_1 \ll \rho), \quad (5.11)$$

$$\gamma_{1*} = i\omega_{1\max} = \frac{\rho_1 V_0^2}{\sqrt{2\rho h_0 \alpha}}, \quad k_* = \frac{\rho_1 V_0^2}{2\alpha}.$$

Здесь приняты обозначения:  $k_*$  — волновое число, соответствующее наиболее быстро растущему возмущению;  $h_0$  и  $V_0$  — толщина и скорость движения пленки;  $\rho_1$  — плотность воздуха.

Результат (5.11) показывает, что для длинных волн, для которых  $k < \rho_1 V_0^2 / \alpha$ , силы поверхностного натяжения не в состоянии компенсировать динамическое действие воздуха, и возмущения нарастают.

Разрешив уравнение (5.10) относительно волнового числа  $k$  считая частоту  $\omega$  заданной, можно исследовать пространственную устойчивость бегущих по тонкому плоскому слою жидкости изгибных волн. В работах G. Crapper'a, N. Dombrowski и G. A. D. Pyott'a [1] и Н. R. Asare, R. K. Takahashi и M. A. Hoffman'a [1] показано, что теории временной и пространственной неустойчивости плоского жидкого слоя, движущегося в воздухе, дают близко совпадающие результаты и удовлетворительно описывают рост изгибных возмущений умеренных частот на линейной стадии, наблюдаемый в экспериментах. Лишь для высокочастотных возмущений, устойчивых согласно (5.10), имеется расхождение с экспериментальными данными,

свидетельствующими, что эти возмущения растут (G. Stapper, N. Dombrowski и G. A. Pyott [1]). Поскольку динамическое действие окружающего пленку воздуха тем слабее, чем меньше длина изгибной волны, при определенной достаточно высокой критической частоте рост возмущений обязательно должен прекращаться. Указанное расхождение теории с экспериментом, возможно, обусловлено лишь недостаточно точным определением этой критической частоты из уравнения (5.10), справедливого для плоского слоя, в то время как в эксперименте исследовались радиально растекающиеся пленки. Этот вопрос требует дальнейшего исследования. В объяснении нуждается также наблюдение, что рост изгибных возмущений радиально растекающейся пленки, связанных с динамическим действием воздуха, прекращается на достаточном удалении от насадка.

D. Weihs [1] для приведения в соответствие теории и эксперимента предпринял попытку вывести уравнение, описывающее распространение по дискообразной пленке осесимметричных изгибных волн с учетом динамического действия воздуха. Полученное им уравнение неверно; соответственно, неверны и выводы, сделанные на основе анализа его решений. На самом деле уравнение малых осесимметричных изгибных возмущений дискообразной пленки должно иметь вид

$$\rho r_0 h_0 \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t \partial r} + V_0^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right) = 2\alpha \left( r \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) - \frac{2\rho_1}{k} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} r. \quad (5.12)$$

Здесь  $r$  — координата, отсчитываемая вдоль радиуса срединной поверхности невозмущенной пленки;  $k = k(r)$  — волновое число.

Как и в случае изгибных возмущений высокоскоростных струй в воздухе (§ 1 главы 3), линейная теория для тонких пленок не предсказывает никакого изменения их толщины в процессе изгиба. Сделав, фактически, предположение, что пленка мгновенно разрушается по достижении амплитудой изгибного возмущения некоторой величины  $\chi_*$ , J. C. P. Huang [1] с использованием (5.11) получил выражение для предельного радиуса круглой пленки, разрушающейся из-за взаимодействия с воздухом ( $We > 10^3$ ). Он предсказывает разрушение пленки при

$$r = c \cdot 1/2 \cdot d \cdot (\rho/\rho_1)^{3/2} We^{-1/3}.$$

Выбрав эмпирическую постоянную  $c = 14,2$  (что соответствует  $\Delta = \ln(\chi_*/\delta_0) = 33$ ,  $\delta_0$  — начальная амплитуда изгибного возмущения), ему удалось удовлетворительно описать результаты своих экспериментов при значениях числа  $We > 10^3$ . Таким образом, с ростом числа  $We$  радиус, на котором происходит разрушение пленки, сначала увеличивается пропорционально  $We$  (разрушение с образованием кольцевого свободного ребра, распадающегося на крупные капли), а затем, начиная с  $We \approx 10^3$ , уменьшается как  $We^{-1/3}$ , причем образуются значительно более мелкие капли. Для теоретического определения размера таких

капель D. Weihs и I. Frankel [1] рассмотрели задачу о форме сечения и устойчивости жидкого цилиндра, движущегося в воздухе в направлении, нормальном к своей оси. Предполагается, что эта ситуация моделирует отрыв жидких колец в результате роста изгибных возмущений на высокоскоростной пленке в воздухе; эти кольца должны разрушаться под действием сил поверхностного натяжения. Действительный механизм разрушения пленки с развитыми изгибными возмущениями в настоящее время не выяснен. Теория изгибных возмущений, учитывающая малые второго порядка (С. J. Clark и N. Dombrowski [1]), предсказывает утоньшение пленки, но вычисленное на ее основе расстояние до точки разрушения не соответствует экспериментальным данным. Возможно, важную роль в разрушении пленок играют возмущения толщины, усиливаемые динамическим действием воздуха. Их легко можно наблюдать на фотографиях, приводимых в работах G. Taylor'a [4] и С. J. Clark'a и N. Dombrowski [1]). В отсутствие динамического действия воздуха такие возмущения затухают из-за вязких потерь. Инкремент этих возмущений в системе координат, связанной с пленкой, определяется соотношением (W. W. Nagerty и J. F. Shea [1])

$$i\omega_2 = \pm \sqrt{\left(\frac{\rho_1 V_0^2}{2\rho} k^3 - \frac{\alpha}{2\rho} k^4\right) h_0}, \quad (5.13)$$

$$\gamma_{2*} = i\omega_{2\max} = \frac{9}{16} \left(\frac{\rho_1 V_0^2}{\alpha}\right)^2 \sqrt{\frac{\alpha h_0}{6\rho}}, \quad k_* = \frac{3}{4} \frac{\rho_1 V_0^2}{\alpha}.$$

Выражение (5.13) получено для случая идеальной жидкости и предсказывает рост возмущений с волновыми числами  $k < \rho_1 V_0^2 / \alpha$ . (В случае  $V_0 = 0$  волны изменения толщины в отличие от изгибных обладают дисперсией). Однако характерное время их нарастания оказывается в соответствии с (5.13) и (5.11) приблизительно в  $\rho / (\rho_1 W e_1)$  раз больше, чем время роста изгибных возмущений ( $W e_1 = \frac{\rho h_0 V_0^2}{2\alpha}$ ). Поэтому скорость роста возмущений толщины может оказаться недостаточной, чтобы определить размеры разрушающихся пленок в экспериментах. Вопрос о механизме разрушения высокоскоростных жидких пленок в газовой среде, чрезвычайно важный с точки зрения приложений (достаточно упомянуть форсунки), не выяснен до конца и ждет своего решения.

В случае пленки, создаваемой при истечении жидкости с достаточно малыми скоростями из щелевого насадка (см. рис. 13,б), разрушение происходит путем отрыва капель от «радиальных» свободных ребер. Теоретическое и экспериментальное исследование этого механизма разрушения проведено в работе С. J. Clark'a и N. Dombrowski [2]. В данном случае неустойчивость связана с ростом длинноволновых возмущений под действием сил поверхностного натяжения и усиливается

наличием центробежного ускорения у жидких частиц при движении вдоль свободного ребра.

В монографии Ю. Ф. Дитякина, Л. А. Клячко, Б. В. Новикова и В. И. Ягодкина [1] дано решение ряда задач о возмущениях жидких пленок в воздушном потоке, по постановке приближенных к ситуациям, возникающим при распыливании жидкостей форсунками. Рассмотрены задачи об изгибных возмущениях цилиндрической пленки с прямолинейной осью (эта же задача решалась недавно в связи с проблемами термоядерной технологии: P. D. Esser, D. D. Paul и S. I. Abdel—Khalik [1]) и о возмущениях пленки в пульсирующем газовом потоке. В указанной монографии описаны разнообразные практические способы создания жидких пленок и дано качественное описание картины их разрушения.

G. D. Crapper, N. Dombrowski и W. P. Jepson [1] обобщили линейную теорию изгибных возмущений пленок на случай вязкоупругой жидкости и показали, что упруговязкие эффекты не влияют на скорость роста возмущений, подтвердив этот результат экспериментально. Независимость скоростей распространения изгибных возмущений в линейном приближении от реологии жидкости является общим фактом (В. М. Ентов [3, 6]).

Наличие в жидкости поверхностно-активных веществ сказывается лишь в уменьшении поверхностного натяжения, что ведет к ускорению роста изгибных возмущений жидкой пленки, движущейся в воздухе (W. P. Jepson [1]).

Устойчивость растягиваемых жидких пленок вязких и реологически сложных жидкостей также привлекает внимание исследователей в связи с процессами переработки полимеров. В работах Y. L. Yeow [1] и G. R. Aird'a и Y. L. Yeow [1] исследована устойчивость формирования жидкой пленки по схеме, изложенной в главе 4 применительно к формированию волокон из расплава: жидкость подается через щель со скоростью  $V_0$  и растягиваясь, наматывается на приемную бобину со скоростью большей  $V_0$ . Устойчивость стационарного режима исследована для случая степенной жидкости. Получено, что критическое значение кратности вытяжки  $E$  резко возрастает с ростом показателя степени  $n$  в степенном реологическом законе (для ньютоновской жидкости  $n=1$  и критическое значение  $E_c=20.22$  как и в случае «резонанса при вытягивании» волокон). Вплоть до  $n \approx 1.2$  устойчивость теряется в результате генерации волн, бегущих вдоль пленки и неизменных по ее ширине. При  $n \geq 1.2$  картина меняется: неустойчивость проявляется в виде волн, бегущих по пленке под углом к направлению вытяжки. Результаты исследований устойчивости пленок, растягиваемых при формировании (плоская и цилиндрическая конфигурации) обобщили W. Minoshima и J. L. White [2].

Жидкие пленки, в которых по некоторым направлениям локально создается сжимающая сила, выпучиваются подобно

жидким струям, рассмотренным в § 2 главы 3 (S. M. Suleiman и В. R. Munson [1], J. O. Cruickshank и В. R. Munson [1]); в них также могут расти возмущения толщины (W. Minoshima и J. L. White [1]).

Пленки, получаемые экструзией с раздувом, также подвержены неустойчивости, проявляющейся в виде пережатий формуемого рукава, ведущих к неравномерности толщины пленки и даже к ее обрыву (C. D. Han [1], C. D. Han и R. Shetty [1] и Y. L. Yeow [2]).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Некоторые приложения свободных струйных и пленочных течений ньютоновских и реологически сложных жидкостей в технике и научных исследованиях

В заключение остановимся на технических применениях свободных струйных и пленочных течений капельных жидкостей. Эти течения давно и прочно заняли место основного элемента в таких важных областях техники и технологии как двигатели внутреннего сгорания и топочные устройства (Л. А. Витман, Б. Д. Кацнельсон и И. И. Палеев [1], А. С. Лышевский [2], Ю. Ф. Дитякин, Л. А. Клячко, Б. В. Новиков и В. И. Ягодкин [1] и С. С. Кутателадзе и М. А. Стырикович [1]), где они используются при распыливании жидкостей форсунками. Столь же важную роль эти течения играют в таких широко распространенных технологических процессах как струйное резание, гранулирование, кондиционирование, пылеочистка, охлаждение, распыливание инсектицидов в сельском хозяйстве, сушка и окраска распыливанием (N. Dombrowski и G. Munday [1], W. S. Janna и J. E. A. John [1], G. Rehbinder [1]). Производство искусственных, синтетических и стеклянных волокон и пленок, составляет важную часть современной химической технологии. Струйные и пленочные течения неньютоновских жидкостей играют весьма важную роль в экспериментальной реологии (F. H. Garner, A. H. Nissan и G. F. Wood [1], C. A. Moore и J. R. A. Pearson [1], В. М. Ентов, С. М. Махкамов и К. В. Мукук [1], В. М. Ентов, Х. С. Кестенбойм, А. Н. Рожков и Л. И. Шарчевич [1], В. М. Ентов, В. М. Кордонский, В. А. Кузьмин, З. П. Шульман и А. Л. Ярин [1, 2], В. М. Ентов [4], P. Schümmer и К. Н. Tebel [1—3]). На основе наблюдения распространения и распада струй создаются методы измерения поверхностного натяжения (M. Ronay [1, 2]).

Струи используются для абсорбирования и увлечения газов (H. C. Burckholder и J. C. Berg [1], E. Van de Sande и J. M. Smith [1], D. Ervine, E. McKeogh и E. M. Elsaywy [1]), для отвода тепла (J. Isiek [3]), как средство борьбы с пожарами и для дождевания (А. П. Исаев [1]).

В последние годы появились и новые «экзотические» области применения свободных струйных и пленочных течений в технике. В связи с катастрофическими последствиями аварий танкеров появляются исследования растекания нефтяных пленок по спокойной водной поверхности при действии сил веса, поверхностного натяжения и вязкости (D. P. Hoult [1], N. D. Di Pietro и R. G. Cox [1], M. Foda и R. G. Cox [1]) и о влиянии на такие пленки волн (E. Korabyan [1]). Подобные вопросы решаются также в связи с новым технологическим методом производства листового стекла — флоат-процессом Пилкингтона (В. В. Попов [1, 2]). Создание современных печатающих устройств привело к использованию струй капельной жидкости (чернил) в устройствах вывода информации ЭВМ (см. W. L. Buehner, J. D. Hill, T. H. Williams и J. W. Woods [1], а также другие работы, помещенные в этом же номере журнала фирмы IBM). Все большее применение находят тонкие струи металлов в литейном производстве при получении проволоки, дроби и т. п. (I. G. Butler, M. Kurz, J. Gillot и B. Lux [1], D. J. Thorne [1], J. N. Anno [2], J. W. Mottern и W. J. Privott [1], В. О. Водянюк, А. Ф. Колесниченко и В. В. Малахов [1], А. Ф. Колесниченко, В. В. Малахов и В. О. Водянюк [1]). Новые методики диагностики в урологии также основаны на исследовании динамики и распада струй (см. литературу в статьях P. Lafrance'a, G. Aiello, R. C. Ritter'a и J. S. Trefil'a [1] и P. Lafrance'a, и R. C. Ritter'a [1]). Изучение биологических мембран приводит к задачам об устойчивости тонких жидких пленок (С. Maldarelli, R. K. Jain, I. B. Ivanov и E. Rukenstein [1], С. Maldarelli и R. K. Jain [1], H. Wendel, P. M. Bisch и D. Gallez [1]). Своеобразное применение находит эффект гиперустойчивости растягиваемых нитей, обнаруженный Тейлором. Он лежит в основе способа получения направленно-армированных пластмасс, когда жидкая эмульсия полимер—полимер продавливается через сходящийся насадок, и капли дисперсной фазы превращаются в систему тончайших армирующих нитей (М. В. Цебренок, М. Якоб, М. Кучинко, А. В. Юдин и Г. В. Виноградов [1], Ю. П. Мирошников, А. М. Гольман и В. Н. Кулезнев [1]). Этот же эффект играет важную роль в повышении устойчивости вытянутых капель дисперсной фазы в эмульсиях (Ю. П. Мирошников, М. Л. Каминский и В. Н. Кулезнев [1], Ю. П. Мирошников и В. Н. Кулезнев [1]). В производстве минеральной ваты жидкие струи отрываются от слоя жидкости на поверхности вращающегося валка и растягиваются под действием центробежных сил. Устойчивость течения в струях обусловлена в данном случае растяжением и ростом вязкости с охлаждением струи (В. Е. Епихин, А. Е. Кулаго и В. Я. Шкадов [1]). Даже в технологии, связанной с управляемым термоядерным синтезом, используются свободные жидкие струи и пленки. Так, таблетки аммиака и водорода получают при заморажива-

нии капель, на которые распадаются жидкие струи (J. N. Anno [2], R. K. Goodman и A. L. Hunt [1], R. J. Calliger, R. J. Turnbull и С. D. Hendricks [1] и R. P. Gilliard, K. Kim и R. J. Turnbull [1]), а свободные пленки жидкого лития планируется применять для защиты стенок термоядерных реакторов от разрушительного действия рентгеновского излучения (Н. R. Asare, R. K. Takahashi и M. A. Hoffman [1], P. D. Esser, D. D. Paul и S. I. Abdel-Khalik [1]; см. также недавно опубликованный обзор В. В. Баженкова, А. С. Дмитриева и В. В. Шишова — Труды МЭИ, 1983, вып. 615, 3—14).

## ЛИТЕРАТУРА

*Авраменко А. П., Горбунов В. Н.* [1] Исследование глубины проникновения струи жидкости в сносящий газовый поток. В сб.: Гидроаэромеханика и теория упругости (Днепропетровск), 1980, № 26, 95—100—РЖМех, 1981, 6Б1277.

*Бабкин В. И., Белоцерковский С. М., Гуляев В. В.* [1] Математическое моделирование на ЭВМ стационарных течений струй идеальной жидкости. Докл. АН СССР, 1981, 259, № 6, 1319—1322 — РЖМех, 1981, 12Б19.

*Баев В. К., Бажайкин А. Н., Болдырев И. В., Бузуков А. А., Терентьев В. А., Тимошенко Б. П.* [1] Начальная стадия развития топливного факела, выброшенного из форсунки под большим давлением. Физ. горения и взрыва, 1979, 15, № 1, 26—32 — РЖМех, 1979, 6Б609.

*Баев В. К., Бажайкин А. Н., Биченков Е. И., Бузуков А. А., Рабинович Р. Л., Тимошенко Б. П.* [1] Рентгеноимпульсный метод изучения внутренней структуры топливного факела. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1980, № 1, 105—111.

*Баев В. К., Бузуков А. А.* [1] О размерах капель при распыле жидкости. В сб.: Нестационарное смесеобразование и горение в замкнутом объеме. Новосибирск, 1979, 44—51 — РЖМех, 1980, 6Б568.

*Базилевский А. В., Воронков С. И., Ентов В. М., Рожков А. Н.* [1] Ориентационные эффекты при распаде струй и нитей разбавленных растворов полимеров. В сб.: Новое в реологии полимеров. Материалы 11 Всес. симпоз. по реол. Суздаль, 1980. Вып. 2. М., 1981, 281—285.

*Базилевский А. В., Воронков С. И., Ентов В. М., Рожков А. Н.* [2] Ориентационные эффекты при распаде струй и нитей разбавленных растворов полимеров. Докл. АН СССР, 1981, 257, № 2, 336—339 — РЖМех, 1981, 7Б818.

*Баранов Г. А., Хухарев В. В.* [1] Исследование свободного кольцевого струйного течения жидкости. НИИ электрофиз. аппаратуры. Ленинград. Препр., 1980, № П-А-0471, 57 с. — РЖМех, 1981, 9Б1213.

*Башговой В. Г., Краков М. С.* [1] Устойчивость осесимметричной струи намагничивающейся жидкости. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1978, № 4, 147—153 — РЖМех, 1978, 11Б773.

*Берман В. С., Ярин А. Л.* [1] Динамические режимы формирования волокон. Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа, 1983, № 6, 31—37.

*Верещагин Л. Ф., Семерчан А. А., Секоян С. С.* [1] К вопросу о распаде высокоскоростной водяной струи. Ж. техн. физ., 1959, 29, № 1, 43—50 — РЖМех, 1959, 10082.

*Витман Л. А., Кацнельсон Б. Д., Палеев И. И.* [1] Распыливание жидкостей форсунками М.—Л.: Энергоиздат, 1962 — РЖМех, 1962, 12Б197.

*Водянюк В. О., Колесниченко А. Ф., Малахов В. В.* [1] Форма частиц, получаемых при резонансном распаде свободной электропроводной струи, возбуждающейся гармоническими электромагнитными силами. Магнит. гидродинам., 1981, № 1, 135—137 — РЖМех, 1981, 7Б362.



Гельфгат Ю. М., Ольшанский С. В., Явнайст Г. А. [1] Исследование разрушения свободной жидкометаллической струи под действием осевого тока. Магнит. гидродинам., 1973, № 2, 49—54 — РЖМех, 1973, 12Б44.

Генкин А. Л., Кукес В. И., Ярин Л. П. [1] О распространении струи несмешивающихся жидкостей. В сб.: Пробл. теплоэнерг. и прикл. теплофиз. (Алма-Ата), 1973, № 9, 100—104 — РЖМех, 1973, 11Б603.

Герценштейн С. Я., Филянд Л. В., Шкадов В. Я. [1] Неустойчивость и образование капель во вращающейся капиллярной струе. В сб.: Нелинейн. волнов. процессы в двухфаз. средах. Новосибирск, 1977, 172—180 — РЖМех, 1977, 12Б113.

Герценштейн С. Я., Шкадов В. Я. [1] Устойчивость неосесимметричных жидких струй. Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа, 1973, № 1, 43—52 — РЖМех, 1973, 6Б480.

Гонор А. Л., Ривкинд В. Я. [1] Динамика капли. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Мех. жидкости и газа, 1982, 17, 86—159 — РЖМех, 1983, 4Г185.

Гуревич М. И. [1] Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979, 536 с. — РЖМех, 1979, 8Б29.

Дятяткин Ю. Ф., Клячко Л. А., Новиков Б. В., Ягодкин В. И. [1] Распыливание жидкостей. М.: Машиностроение, 1977, 207 с. — РЖМех, 1977, 9Б685.

Езерский А. Б., Реутов В. П. [1] Управление развитием неустойчивости капиллярной струи двумя ультразвуковыми пучками. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1982, № 2, 41—47 — РЖМех, 1982, 8Б142.

Елисеев В. И. [1] Асимптотическое решение задачи об истечении тяжелых ламинарных струй несмешивающихся жидкостей. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1977, № 2, 78—84 — РЖМех, 1977, 8Б164.

Елисеев В. И. [2] Асимптотическое решение задачи об истечении вязких ламинарных струй со свободными поверхностями. В сб.: Гидроаэромеханика и теория упругости (Днепропетровск), 1979, № 24, 3—9.

Елисеев В. И. [3] К исследованию затвердевания струи вязкой жидкости, не смешивающейся с окружающей средой. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1980, № 4, 81—87 — РЖМех, 1980, 11Б471.

Елисеев В. И. [4] Истечение струй идеальной весомой жидкости при больших числах Фруда. В сб.: Гидроаэромеханика и теория упругости (Днепропетровск), 1980, № 26, 50—57 — РЖМех, 1981, 6Б1020.

Елисеев В. И. [5] Устойчивость струй идеальной весомой жидкости. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1981, № 3, 46—50 — РЖМех, 1981, 10Б26.

Ентов В. М. [1] Об устойчивости капиллярных струй упруговязких жидкостей. Инж.-физ. ж., 1978, 34, № 2, 243—248 — РЖМех, 1978, 5Б782.

Ентов В. М. [2] Entov V. M. On the stability of capillary jets of elastoviscous liquids. Arch. mech. stosow., 1978, 30, № 4—5, 435—442.

Ентов В. М. [3] Динамика пленок вязких и упругих жидкостей. Ин-т пробл. мех. АН СССР. Препр., 1979, № 130, 47 с. — РЖМех, 1980, 3Б732.

Ентов В. М. [4] Реологические эффекты в динамике струй и пленок. В сб.: Новое в реологии полимеров. Материалы 11 Всес. симпоз. по реол. Суздаль, 1980. Вып. 1. М., 1982, 172—181 — РЖМех, 1982, 10Г212.

Ентов В. М. [5] Квазиодномерная теория свободных струй капельных жидкостей. В сб.: Струйные течения жидкостей и газов. Тез. Всес. Науч. конф. Новополоцк, 1982. Ч. 2. Новополоцк, 1982, 139—145 — РЖМех, 1982, 12Г270.

Ентов В. М. [6] Entov V. M. On the dynamics of films of viscous and elastoviscous liquids. Arch. mech. stosow., 1982, 34, № 4, 395—407 — РЖМех, 1983, 11Г160.

Ентов В. М., Кестенбойм Х. С., Рожков А. Н., Шаревич Л. И. [1] О динамической форме равновесия пленки вязкой и упруго-вязкой жидкости. Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа, 1980, № 2, 9—18 — РЖМех, 1980, 7Б860.

Ентов В. М., Кордонский В. И., Кузьмин В. А., Шульман З. П., Ярин А. Л. [1] Исследование распада струй реологически сложных жидкостей. Ин-т тепло- и массообмена АН БССР. Препр., 1980, № 2, 36 с.

Ентов В. М., Кордонский В. И., Кузьмин В. А., Шульман З. П., Ярин А. Л. [2] Исследование распада струй реологически сложных жидкостей. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1980, № 3, 90—98 — РЖМех, 1980, 11Б655.

Ентов В. М., Махкамов С. М., Мукук К. В. [1] Об одном эффекте нормальных напряжений. Инж.-физ. ж., 1978, 34, № 3, 514—518 — РЖМех, 1978, 7Б916.

Ентов В. М., Ярин А. Л. [1] Динамика струй капельной жидкости. Ин-т пробл. мех. АН СССР. Препр., 1979, № 127, 64 с. — РЖМех, 1979, 11Б1013.

Ентов В. М., Ярин А. Л. [2] Уравнения динамики струи капельной жидкости. Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа, 1980, № 5, 11—18 — РЖМех, 1981, 1Б660.

Ентов В. М., Ярин А. Л. [3] Поперечная устойчивость струи капельной жидкости во встречном потоке воздуха. Инж.-физ. ж., 1980, 38, № 5, 806—812 — РЖМех, 1980, 8Б187.

Ентов В. М., Ярин А. Л. [4] О влиянии упругих напряжений на капиллярный распад струй разбавленных растворов полимеров. Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа, 1984, № 1, 27—35 — РЖМех, 1984, 6Г248.

Ентов В. М., Ярин А. Л. [5] *Entov V. M., Yarin A. L. The dynamics of thin liquid jets in air. J. Fluid Mech., 1984, 140, 91—111.*

Епихин В. Е. [1] О формах кольцевых струй капельной жидкости. Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа, 1977, № 1, 9—14 — РЖМех, 1977, 7Б782.

Епихин В. Е. [2] О течении закрученных кольцевых струй капельной жидкости в окружающей среде. Вестн. МГУ. Мат., мех., 1978, № 1, 74—83 — РЖМех, 1978, 8Б93.

Епихин В. Е. [3] О формах кольцевых струй капельных жидкостей. Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа, 1979, № 5, 144—148 — РЖМех, 1980, 4Б105.

Епихин В. Е. [4] Течение осесимметричных струй с предварительной закруткой. Вестн. МГУ. Мат., мех., 1980, № 2, 71—75 — РЖМех, 1980, 7Б132.

Епихин В. Е., Кулагов А. Е., Шкадов В. Я. [1] Движение неизотермической струи в поле центробежных сил. Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа, 1980, № 5, 27—36 — РЖМех, 1981, 1Б70.

Епихин В. Е., Кулагов А. Е., Шкадов В. Я. [2] Влияние конвекции и теплового излучения на охлаждение вертикально падающей струи расплава. Инж.-физ. ж., 1981, 41, № 4, 635—644 — РЖМех, 1982, 2Б240.

Епихин В. Е., Шкадов В. Я. [1] Течение и неустойчивость капиллярных струй, взаимодействующих с окружающей средой. Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа, 1978, № 6, 50—59 — РЖМех, 1979, 4Б719.

Епихин В. Е., Шкадов В. Я. [2] Гидродинамическая неустойчивость осесимметричных течений идеальной жидкости с межфазной поверхностью. Инж.-физ. ж., 1983, 45, № 1, 64—72 — РЖМех, 1983, 10Б19.

Епихин В. Е., Шкадов В. Я. [3] О затягивании полости кольцевых струй, взаимодействующих с окружающей средой. Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа, 1983, № 6, 3—11.

Иванов В. А. [1] О дроблении жидкой струи. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1966, № 4, 30—37 — РЖМех, 1967, 4Б438.

Исаев А. П. [1] Гидравлика дождевальных машин. М.: Машиностроение, 1973, 213 с.

Кабаков В. И., Аладьев И. Т. [1] Смещение и конденсация в скоростных двухфазных потоках в энергетических устройствах. Обзор. М., Издание ЭНИИ, 1974, 43 с.

Казенков А. К., Каллистов Ю. Н., Карликов В. П., Шоломович Г. И. [1] Исследование тонких кольцевых струй несжимаемой жидкости. Науч. тр. ин-т мех. МГУ, 1970, № 1, 21—33 — РЖМех, 1971, 1Б557.

Кожевников В. М. [1] Исследование струйного течения магнитной жидкости в электрическом и магнитном полях. Магнит. гидродинам., 1983, № 2, 85—87 — РЖМех, 1983, 10Г178.

Кожевников В. М., Чеканов В. В., Янговский Е. И. [1] Свободные вертикальные струи над деформированной поверхностью магнитной жидкости в электрическом поле. Магнит. гидродинам., 1982, № 4, 118—120 — РЖМех, 1983, 4Г201.

Колесниченко А. Ф. [1] Капиллярные МГД-течения со свободными границами. Магнит. гидродинам., 1979, № 2, 122—128 — РЖМех, 1979, 10Б529.

- Колесниченко А. Ф., Малахов В. В., Водянюк В. О.* [1] Получение частиц равных размеров с помощью магнитодинамических грануляторов. *Магнит. гидродинам.*, 1982, № 2, 142—145 — РЖМех, 1982, 11Г38.
- Колпацких В. Л., Мартыненко О. Г., Шнип А. И.* [1] Динамическая модель реакции процесса вытяжки стекловолокна на возмущающие воздействия. *Ин-т тепло- и массообмена АН БССР. Препр.*, 1979, № 9, 42 с.
- Кутателадзе С. С., Стырикович М. А.* [1] Гидродинамика газожидкостных систем. М.: Энергия, 1976, 296 с. — РЖМех, 1976, 8Б721.
- Левич В. Г.* [1] Физико-химическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1959, 699 с. — РЖМех, 1960, 9780.
- Лышевский А. С.* [1] Закономерности дробления жидкостей механическими форсунками давления. Новочеркасск: Политехн. ин-т, 1961, 180 с. — РЖМех, 1962, 1Б369.
- Лышевский А. С.* [2] Распыливание топлива в судовых дизелях. Л.: Судостроение, 1971, 100 с.
- Магомедов К. М.* [1] Об асимптотическом исследовании внутренних и струйных течений вязкой жидкости. *Докл. АН СССР*, 1982, 264, № 6, 1331—1335 — РЖМех, 1982, 10Б99.
- Маркова М. П., Шкадов В. Я.* [1] О нелинейном развитии капиллярных волн в струе жидкости. *Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа*, 1972, № 3, 30—37 — РЖМех, 1972, 9Б660.
- Мартынов С. И., Тактаров Н. Г.* [1] Об устойчивости струи намагничивающейся жидкости. *Магнит. гидродинам.*, 1979, № 3, 23—27 — РЖМех, 1980, 1Б249.
- Мартынов С. И., Тактаров Н. Г.* [2] О параметрической неустойчивости и стабилизации струи намагничивающейся жидкости. *Магнит. гидродинам.*, 1980, № 2, 27—30 — РЖМех, 1980, 10Б363.
- Мирошников Ю. П., Гольман А. М., Кулезнёв В. Н.* [1] Об устойчивости волокон дисперсной фазы в расплаве смеси полимеров. *Коллоидный ж.*, 1979, 41, № 6, 1120—1125 — РЖМех, 1980, 8Б929.
- Мирошников Ю. П., Каминский М. Л., Кулезнёв В. Н.* [1] Исследование устойчивости анизометрических капель дисперсной фазы в вязкоупругих полимерных эмульсиях. *Коллоидный ж.*, 1979, 41, № 6, 1112—1119 — РЖМех, 1980, 8Б908.
- Мирошников Ю. П., Кулезнёв В. Н.* [1] Самопроизвольное разрушение вытянутых частиц дисперсной фазы в полимерных эмульсиях. В сб.: *Новое в реологии полимеров. Материалы 11 Всес. симпоз. по реол. Суздаль*, 1980. Вып. 2. М., 1981, 264—268.
- Новиков А. А.* [1] Нелинейные капиллярные волны на поверхности струи вязкой жидкости. *Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа*, 1977, № 2, 179—182 — РЖМех, 1977, 10Б82.
- Панченков Г. М., Мамлеев Р. А.* [1] Особенности развития неустойчивости капиллярных струй жидкости. *Ж. физ. хим.*, 1978, 52, № 3, 588—591 — РЖМех, 1978, 8Б1395.
- Панченков Г. М., Мамлеев Р. А., Максименко М. З., Папко В. В.* [1] О влиянии длительности воздействия наложенных возмущений на распад струй жидкости. *Ж. физ. хим.*, 1978, 52, № 3, 592—595 — РЖМех, 1978, 8Б779.
- Петров Г. И., Калинина Т. Д.* [1] Применение метода малых колебаний к исследованию распада струи топлива в воздухе. *Тех. записки МАП*, 1947, № 4, 15—23.
- Попов В. В.* [1] Течение вязкой пленки по поверхности невязкой жидкости. *Ж. прикл. мех. и техн. физ.*, 1982, № 2, 33—40 — РЖМех, 1982, 8Б92.
- Попов В. В.* [2] Течение вязкой пленки со свободными концами в одномерном приближении. *Ж. прикл. мех. и техн. физ.*, 1983, № 4, 67—70.
- Рабинович Л. М.* [1] О влиянии растворимых поверхностно-активных веществ на устойчивость жидких пленок и струй. *Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа*, 1978, № 6, 26—33 — РЖМех, 1979, 5Б539.
- Рожков А. Н.* [1] Динамика нитей разбавленных растворов полимеров. *Инж.-физ. ж.*, 1983, 45, № 1, 72—80 — РЖМех, 1983, 10Г254.

Савицкий А. В., Горшкова И. А., Шмик Г. Н., Фролова И. Л. [1] Экспериментальное достижение прочности полимера, близкой к предельной. Высокомолекул. соединения. Б. Кратк. сообщения, 1983, 25, № 5, 352—353.

Синдеев А. А., Харьков Б. А. [1] Получение нетканых материалов прямым формованием из расплава полимеров. Хим. волокна, 1981, № 3, 23—28.

Тактаров Н. Г. [1] Распад струи магнитной жидкости. Магнит. гидродинам., 1975, № 2, 35—38 — РЖМех, 1975, 11Б35.

Филянд Л. В. [1] Неустойчивость и распад капиллярных жидких струй в спутном потоке воздуха. Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа, 1981, № 3, 124—128 — РЖМех, 1981, 10Б654.

Филянд Л. В. [2] Исследование неустойчивости и распада капиллярных струй. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Ин-т мех. МГУ. М., 1981.

Холин Б. Г., Сегаль Р. Б., Гайсинский Ю. Ф. [1] Длинноволновый монодисперсный распад жидкой струи. Докл. АН СССР, 1980, 253, № 5, 1074—1076 — РЖМех, 1981, 1Б693.

Хусид Б. М. [1] Свободные струи реологически сложной жидкости. Докл. АН БССР, 1979, 23, № 12, 1110—1113 — РЖМех, 1980, 4Б875.

Хусид Б. М. [2] Распад свободной струи вязкоупругой жидкости. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1982, № 1, 54—63 — РЖМех, 1982, 10Г218.

Хусид Б. М. [3] О распаде капиллярных струй нелинейно-вязких и нелинейно-вязкоупругих жидкостей. Докл. АН БССР, 1982, 26, № 4, 333—336 — РЖМех, 1982, 8Г236.

Цебренько М. В., Яков М., Кучинко М., Юдин А. В., Виноградов Г. В. [1] Tsebrhenko M. V., Jakob M., Kuchinko M., Yudin A. V., Vinogradov G. V. Fibrillation of crystallizable polymers in flow exemplified by melts of mixtures of polyoxymethylene and copolyamides. Int. J. Polym. Mater., 1974, 3, № 2, 99—116 — РЖМех, 1975, 1Б1225.

Чыгон За Бинь [1] О движении сферической пленки жидкости. Докл. АН СССР, 1983, 268, № 6, 1333—1337 — РЖМех, 1983, 7Б94.

Шаповалов В. М., Тябин Н. В. [1] Реодинамика элонгационного течения плоской полимерной струи при вытяжке пленки. Инж.-физ. ж., 1981, 41, № 6, 1027—1031 — РЖМех, 1982, 5Г293.

Шаповалов В. М., Тябин Н. В. [2] Вытяжка плоской аномально-вязкой пленки в неизотермических условиях. Инж.-физ. ж., 1982, 43, № 1, 62—70 — РЖМех, 1982, 11Г175.

Шкадов В. Я. [1] Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. Науч. тр. Ин-т мех. МГУ, 1973, № 25, 192 с. — РЖМех, 1974, 4Б795.

Шкадов В. Я. [2] Численное исследование устойчивости гидродинамических течений и нелинейного взаимодействия возмущений. В сб.: Числ. методы мех. сплош. среды (Новосибирск), 1981, 12, № 4, 148—155 — РЖМех, 1982, 3Б191.

Шкадов В. Я., Радев С. П., Пенчев И. П., Господинов П. Н. [1] Течение и неустойчивость жидких капиллярных струй. Успехи механики, 1982, 5, № 3/4, 101—146.

Шкадов В. Я., Холпанов Л. П., Епихин В. Е., Мочалова Н. С., Малюсов В. А., Жаворонков Н. М. [1] Расчет пленочных и струйных течений капиллярной жидкости на начальном участке. В сб.: Нелинейн. волнов. процессы в двухфаз. средах. Новосибирск, 1977, 213—222 — РЖМех, 1977, 12Б123.

Шульман З. П., Байков В. И. [1] Реодинамика и тепло- массообмен в пленочных течениях. Минск: Наука и техн., 1979, 295 с. — РЖМех, 1979, 11Б904.

Шульман З. П., Кордонский В. И., Кузьмин В. А., Хусид Б. М. [1] Особенности истечения струй из насадки, генерирующей возмущения. В сб.: Теория мех. перераб. полимерн. материалов. 2-й Всес. симпоз. Тез. докл. Пермь, 1980, 90—91 — РЖМех, 1981, 1Б1240.

Шульман З. П., Хусид Б. М. [1] О распаде вязкоупругой струи. В сб.: Тепло- и массоперенос: физ. основы и методы. Минск, 1979, 58—60 — РЖМех, 1980, 6Б715.

Шульман З. П., Хусид Б. М. [2] Осесимметричные свободные струи нелинейно-вязких и вязкоупругих жидкостей. В сб.: Струйные течения жидкостей и газов. Тез. Всес. науч. конф., Новополоцк, 1982. Ч. 2. Новополоцк, 1982, 131—139 — РЖМех, 1982, 12Г283.

Шульман З. П., Хусид Б. М. [3] Нестационарные процессы конвективного переноса в наследственных средах. Минск: Наука и техн., 1983, 256 с. — РЖМех, 1984, 1Г263.

Ярин А. Л. [1] Об устойчивости струи вязкоупругой жидкости при наличии потока массы на ее поверхности. Инж.-физ. ж., 1979, 37, № 2, 230—238 — РЖМех, 1979, 11Б897.

Ярин А. Л. [2] Теоретическое исследование динамики и распада свободных струй жидкостей. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Ин-т проблем механики АН СССР, М., 1980.

Ярин А. Л. [3] Динамика изгибных возмущений струй нелинейно-вязких жидкостей, движущихся в воздухе. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1982, № 1, 45—50 — РЖМех, 1982, 10Г205.

Ярин А. Л. [4] Численное исследование изгибной неустойчивости тонких струй капельных жидкостей. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1982, № 4, 38—43 — РЖМех, 1983, 1Б335.

Ярин А. Л. [5] Стационарные конфигурации волокон, формируемых в неизотермических условиях. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1982, № 6, 139—144.

Ярин А. Л. [6] Исследование динамики формирования волокон из расплава. В сб.: Струйные течения жидкостей и газов. Тез. Всес. науч. конф., Новополоцк, 1982. Ч. 3. Новополоцк, 1982, 41—47 — РЖМех, 1982, 12Г289.

Ярин А. Л. [7] Об уравнениях динамики струй капельной жидкости. Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа, 1983, № 1, 161—163 — РЖМех, 1983, 8Б83.

Ярин А. Л. [8] О возникновении автоколебаний при формировании волокон. Прикл. мат. и мех., 1983, 47, № 1, 82—88.

Acierno D., La Mantia F. P., Iorio G., Marrucci G. [1] Surface instabilities arising in drawing cylindrical specimens of low-density polyethylene melts. J. Non-Newton. Fluid Mech., 1978, 4, № 1—2, 99—109 — РЖМех, 1979, 3Б918.

Aird G. R., Yeow Y. L. [1] Stability of film casting of power-law liquids. Ind. and Eng. Chem. Fundam., 1983, 22, № 1, 7—10.

Anno J. N. [1] Influence of viscosity on the stability of a cylindrical jet. AIAA Journal, 1974, 12, № 8, 1137—1138 — РЖМех, 1975, 5Б402. Перевод: Энно. Влияние вязкости на устойчивость цилиндрической струи. Ракетная техн. и космонавтика, 1974, 12, № 8, 168—169.

Anno J. N. [2] The mechanics of liquid jets. Lexington: D. C. Heath and Co., 1977, 102 p. — РЖМех, 1979, 12Б975.

Anwar M. M., Bright A., Das T. K., Wilkinson W. L. [1] Laminar liquid jets in immiscible liquid systems. Trans. Inst. Chem. Eng., 1982, 60, № 5, 306—313 — РЖМех, 1983, 2Б137.

Asare H. R., Takahashi R. K., Hoffman M. A. [1] Liquid sheet jet experiments: Comparison with linear theory. Trans. ASME. J. Fluids Eng., 1981, 103, № 4, 595—604 — РЖМех, 1982, 5Б107. Перевод: Асаре, Такахаши, Гоффман. Эксперименты с плоскими жидкими струями. Сравнение с линейной теорией. Теор. основы инж. расчетов, 1981, 103, № 4, 198—209.

Assenov A., Penchev I., Radev S. [1] Effect of outflow velocity and physico-chemical properties on the stability of a cylindrical jet in a liquid-liquid system. Теор. и прил. мех., 1977, 8, № 1, 35—40 — РЖМех, 1977, 12Б114.

Bailey A. G., Balachandran W. [1] The disruption of electrically charged jets of viscous liquid. J. Electrostat., 1981, 10, 99—105 — РЖМех, 1981, 10Б667.

Baumgarten P. K. [1] Electrostatic spinning of acrylic microfibers. J. Colloid and Interface Sci., 1971, 36, № 1, 71—79.

Bogy D. B. [1] Use of one-dimensional Cosserat theory to study instability in a viscous liquid jet. Phys. Fluids, 1978, 21, № 2, 190—197 — РЖМех, 1978, 10Б160.

Bogy D. B. [2] Wave propagation and instability in a circular semi-infinite liquid jet harmonically forced at the nozzle. Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1978, 45, № 3, 469—474 — РЖМех, 1979, 5Б742.

- Bogy D. B.* [3] Break-up of a liquid jet: second perturbation solution for one-dimensional Cosserat theory. IBM J. Res. and Develop., 1979, 23, № 1, 87—92 — ПЖМех, 1979, 8Б842.
- Bogy D. B.* [4] Break-up of a liquid jet: Third perturbation Cosserat solution. Phys. Fluids, 1979, 22, № 2, 224—230 — ПЖМех, 1979, 8Б24.
- Bogy D. B.* [5] Drop formation in a circular liquid jet. Annu. Rev. Fluid Mech. Vol. 11. Palo Alto, Calif., 1979, 207—228.
- Bogy D. B.* [6] Steady draw-down of a liquid jet under surface tension and gravity. J. Fluid Mech., 1981, 105, 157—176 — ПЖМех, 1981, 9Б973.
- Bogy D. B., Shine S. J., Talke F. E.* [1] Finite difference solution of the Cosserat fluid jet equations. J. Comput. Phys., 1980, 38, № 3, 294—326.
- Borgas M. S., Tuck E. O.* [1] Thin water jets. J. Fluid Mech., 1982, 118, 379—391 — ПЖМех, 1982, 10Б544.
- Buckmaster J.* [1] The buckling of thin viscous jets. J. Fluid Mech., 1973, 61, № 3, 449—463 — ПЖМех, 1974, 5Б737.
- Buckmaster J. D., Nachman A., Ting L.* [1] The buckling and stretching of a viscida. J. Fluid Mech., 1975, 69, № 1, 1—20 — ПЖМех, 1975, 11Б641.
- Buehner W. L., Hill J. D., Williams T. H., Woods J. W.* [1] Application of ink jet technology to a word processing output printer. IBM J. Res. and Develop., 1977, 21, № 1, 2—9.
- Burckholder H. C., Berg J. C.* [1] Effect of mass transfer on laminar jet breakup. AIChE Journal, 1974, 20, № 5, 863—880.
- Butler I. G., Kurz W., Gillot J., Lux B.* [1] The production of metal fibres directly from the melt. Fibre Sci. and Technol., 1972, 5, № 4, 243—262.
- Calliger R. J., Turnbull R. J., Hendricks C. D.* [1] Hollow drop production by injection of gas bubbles into a liquid jet. Rev. Sci. Instrum., 1977, 48, № 7, 846—851. Перевод: *Каллиджер, Тернбулл, Хендрикс*. Получение полых капель путем введения пузырьков газа в струю жидкости. Приборы для научн. исследований, 1977, № 7, 131—137.
- Caulk D. A., Naghdi P. M.* [1] The influence of twist on the motion of straight elliptical jets. Arch. Ration. Mech. and Anal., 1979, 69, № 1, 1—30 — ПЖМех, 1979, 8Б25.
- Caulk D. A., Naghdi P. M.* [2] On the onset of breakup in inviscid and viscous jets. Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1979, 46, № 2, 291—297 — ПЖМех, 1979, 12Б971.
- Chandrasekhar S.* [1] Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: The Clarendon Press, 1961, 654 p. — ПЖМех, 1962, 10Б57.
- Chang J. C., Denn M. M.* [1] An experimental study of isothermal spinning of a Newtonian and a viscoelastic liquid. J. Non-Newton. Fluid Mech., 1979, 5, 369—385 — ПЖМех, 1979, 10Б1136.
- Chang J. C., Denn M. M., Geyling F. T.* [1] Effects of inertia, surface tension, and gravity on the stability of isothermal drawing of Newtonian fluids. Ind. and Eng. Chem. Fundam., 1981, 20, № 2, 147—149 — ПЖМех, 1982, 3Б202.
- Chang J. C., Denn M. M., Kase S.* [1] Dynamic simulation of low-speed melt spinning. Ind. and Eng. Chem. Fundam., 1982, 21, № 1, 13—17 — ПЖМех, 1982, 7Г273.
- Charwat A. F., Russalli R. R.* [1] On the disintegration of superheated capillary jets. Physicochem. Hydrodyn., 1981, 2, № 1, 55—60 — ПЖМех, 1982, 1Б435.
- Chaudhary K. C., Maxworthy T.* [1] The nonlinear capillary instability of a liquid jet. Part 2. Experiments on jet behaviour before droplet formation. J. Fluid Mech., 1980, 96, № 2, 275—286 — ПЖМех, 1980, 7Б775.
- Chaudhary K. C., Maxworthy T.* [2] The nonlinear capillary instability of a liquid jet. Part 3. Experiments on satellite drop formation and control. J. Fluid Mech., 1980, 96, № 2, 287—298 — ПЖМех, 1980, 6Б667.
- Chaudhary K. C., Redekopp L. G.* [1] The nonlinear capillary instability of a liquid jet. Part 1. Theory. J. Fluid Mech., 1980, 96, № 2, 257—274 — ПЖМех, 1980, 7Б774.

*Ciferri A., Ward I. M.* (Ed.) [1] Ultra-high modulus polymers. London: Appl. Sci. Publ., 1979. Перевод: Сверхвысокомодульные полимеры. Л.: Химия, 1983.

*Clark C. J., Dombrowski N.* [1] Aerodynamic instability and disintegration of inviscid liquid sheets. Proc. Roy. Soc. London, 1972, A329, № 1579, 467—478.

*Clark C. J., Dombrowski N.* [2] On the formation of drops from the rims of fan spray sheets. J. Aerosol. Sci., 1972, 3, № 3, 173—183 — ПЖМех, 1972, 11Б498.

*Cline H. E., Anthony T. R.* [1] The effect of harmonics on the capillary instability of liquid jets. J. Appl. Phys., 1978, 49, № 6, 3203—3208 — ПЖМех, 1978, 11Б763.

*Cogswell F. N.* [1] Polymer rheology during elongational flow. Appl. Polym. Symp., 1975, № 27, 1—18 — ПЖМех, 1976, 6Б1484.

*Coyle R. W., Berg J. C., Niwa J. C.* [1] Liquid-liquid jet breakup under conditions of relative motion, mass transfer and solute adsorption. Chem. Eng. Sci., 1981, 36, № 1, 19—28 — ПЖМех, 1981, 6Б773.

*Crapper G. D., Dombrowski N., Jepson W. P.* [1] Wave growth on thin sheets of non-Newtonian liquids. Proc. Roy. Soc. London, 1975, A342, № 1629, 225—236 — ПЖМех, 1975, 7Б1265.

*Crapper G. D., Dombrowski N., Pyott G. A. D.* [1] Large amplitude Kelvin—Helmholtz waves on thin liquid sheets. Proc. Roy. Soc. London, 1975, A342, № 1629, 209—224 — ПЖМех, 1975, 7Б780.

*Crochet M. J., Keunings R.* [1] Finite element analysis of the swell of a highly elastic fluid. J. Non-Newton. Fluid Mech., 1982, 10, № 3—4, 339—356 — ПЖМех, 1983, 2Г242.

*Cruickshank J. O., Munson B. R.* [1] Viscous fluid buckling of plane and axisymmetric jets. J. Fluid Mech., 1981, 113, 221—239 — ПЖМех, 1982, 5Б106.

*Cruickshank J. O., Munson B. R.* [2] The viscous-gravity jet in stagnation flow. Trans. ASME: J. Fluids Eng., 1982, 104, № 3, 360—362 — ПЖМех, 1983, 4Б70. Перевод: Круикшанк, Мансон. Торможение вязкой струи в поле силы тяжести. Теор. основы инж. расчетов, 1982, 104, № 3, 185—187.

*Cruickshank J. O., Munson B. R.* [3] An energy loss coefficient in fluid buckling. Phys. Fluids, 1982, 25, № 11, 1935—1937 — ПЖМех, 1983, 7Б87.

*Cruickshank J. O., Munson B. R.* [4] A theoretical prediction of the fluid buckling frequency. Phys. Fluids, 1983, 26, № 4, 928—930.

*Davies J. T., Makepeace R. W.* [1] Measurement of the surface ages of water jets. AIChE Journal, 1978, 24, № 3, 524—530 — ПЖМех, 1978, 12Б938.

*Davies J. T., Young-Hoon A. A.* [1] Restrained turbulent jets of a non-Newtonian solution. Chem. Eng. Sci., 1974, 29, № 5, 1115—1121 — ПЖМех, 1974, 11Б1271.

*Debye P., Daen J.* [1] Stability considerations on nonviscous jets exhibiting surface or body tension. Phys. Fluids, 1959, 2, № 4, 416—421 — ПЖМех, 1961, 5Б338.

*Demay Y., Agassant J. F.* [1] Application de la stabilité linéaire à l'étude du filage textile isotherme et non isotherme. J. méc. théor. et appl., 1982, 1, № 5, 763—772.

*Denn M. M.* [1] Continuous drawing of liquids to form fibers. Annu. Rev. Fluid Mech. Vol. 12. Palo Alto, Calif., 1980, 365—387 — ПЖМех, 1980, 9Б909.

*Denn M. M., Petrie C. J. S., Avenas P.* [1] Mechanics of steady spinning of a viscoelastic liquid. AIChE Journal, 1975, 21, № 4, 791—799 — ПЖМех, 1976, 4Б642.

*Di Pietro N. D., Cox R. G.* [1] The spreading of a very viscous liquid on a quiescent water surface. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1979, 32, № 4, 355—381 — ПЖМех, 1980, 8Б96.

*Dombrowski N., Munday G.* [1] Spray drying. Chapter 16. In: Biochemical and Biological Engineering Sci., 2. London: Acad. Press, 1968.

*Donnelly G. J., Weinberger C. B.* [1] Stability of isothermal fiber spinning of a Newtonian fluid. Ind. and Eng. Chem. Fundam., 1975, 14, № 4, 334—337 — ПЖМех, 1976, 7Б91.

*Donnelly R. J., Glaberson W.* [1] Experiments on the capillary instability of a liquid jet. Proc. Roy. Soc. London, 1966, A290, № 1423, 547—556 — ПЖМех, 1967, 2Б697.

*Duda J. L., Vrentas J. S.* [1] Fluid mechanics of laminar liquid jets. Chem. Eng. Sci., 1967, 22, № 6, 855—869 — ПЖМех, 1968, 7Б688.

*Dunne B., Cassen B.* [1] Some phenomena associated with supersonic liquid jets. J. Appl. Phys., 1954, 25, № 5, 569—572 — ПЖМех, 1958, 9815.

*Dunne B., Cassen B.* [2] Velocity discontinuity instability of a liquid jet. J. Appl. Phys., 1956, 27, № 6, 577—582 — ПЖМех, 1959, 7623.

*Dutta A., Ryan M. E.* [1] Dynamics of a creeping Newtonian jet with gravity and surface tension: a finite difference technique for solving steady free-surface flows using orthogonal curvilinear coordinates. AIChE Journal, 1982, 28, № 2, 220—232 — ПЖМех, 1982, 12Б71.

*Ervine D. A., McKeogh E., Elsayy E. M.* [1] Effect of turbulence intensity on the rate of air entrainment by plunging water jets. Proc. Inst. Civ. Eng., 1980, 69, Part 2, June, 425—445 — ПЖМех, 1980, 11Б113.

*Esser P. D., Paul D. D., Abdel-Khalik S. I.* [1] Stability of the lithium «waterfall» first wall protection concept for inertial confinement fusion reactors. Nucl. Technol./Fusion, 1981, 1, № 2, 285—294.

*Fenn R. W., Middleman S.* [1] Newtonian jet stability: the role of air resistance. AIChE Journal, 1969, 15, № 3, 379—383 — ПЖМех, 1970, 5Б801.

*Field J. E., Lesser M. B.* [1] On the mechanics of high speed liquid jets. Proc. Roy. Soc. London, 1977, A357, № 1689, 143—162 — ПЖМех, 1978, 5Б177.

*Fisher R. J., Denn M. M.* [1] A theory of isothermal melt spinning and draw resonance. AIChE Journal, 1976, 22, № 2, 236—246.

*Fisher R. J., Denn M. M.* [2] Mechanics of nonisothermal polymer melt spinning. AIChE Journal, 1977, 23, № 1, 23—28.

*Foda M., Cox R. G.* [1] The spreading of thin liquid films on a water-air interface. J. Fluid Mech., 1980, 101, № 1, 33—51 — ПЖМех, 1981, 4Б86.

*Freeman R. W., Tavlarides L. L.* [1] Observations of the instabilities of a round jet and the effect of cocurrent flow. Phys. Fluids, 1979, 22, № 4, 782—783 — ПЖМех, 1979, 12Б974.

*Gagon D. K., Denn M. M.* [1] Computer simulation of steady polymer melt spinning. Polym. Eng. Sci., 1981, 21, № 13, 844—853.

*Garmendia L.* [1] A simplified model of electro-aerodynamic atomization. AIChE Journal, 1977, 23, № 6, 935—938.

*Garmendia L. A., Smith I. K.* [1] The effects of an electrostatic field and air stream on water jet break-up length. Can. J. Chem. Eng., 1975, 53, № 6, 606—610 — ПЖМех, 1976, 9Б686.

*Garner F. H., Nissan A. H., Wood G. F.* [1] Thermodynamics and rheological behaviour of elasto-viscous systems under stress. Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1950, A243, № 858, 37—66.

*Gear R. L., Keentok M., Milthorpe J. F., Tanner R. I.* [1] The shape of low Reynolds number jets. Prys. Fluids, 1983, 26, № 1, 7—9 — ПЖМех, 1983, 8Б126.

*Geer J.* [1] Slender streams with gravity: Outer asymptotic expansions. Phys. Fluids, 1977, 20, № 10, pt 1, 1613—1621; 1622—1630 — ПЖМех, 1978, 5Б5; 5Б6.

*Geer J. F., Strikwerda J. C.* [1] Vertical slender jets. J. Fluid Mech., 1980, 101, № 1, 53—63 — ПЖМех, 1981, 8Б23.

*Gelder D.* [1] The stability of fiber drawing processes. Ind. and Eng. Chem. Fundam., 1971, 10, № 3, 534—535 — ПЖМех, 1972, 3Б618.

*Geyling F. T.* [1] Basic fluid-dynamic considerations in the drawing of optical fibers. Bell Syst. Tech. J., 1976, 55, № 8, 1011—1056.

*Gifford W. A.* [1] Finite element analysis of isothermal fiber formation. Phys. Fluids, 1982, 25, № 2, 219—225 — ПЖМех, 1982, 10Б91.

*Gilliard R. P., Kim K., Turnbull R. J.* [1] Spherical hydrogen pellet generator for magnetic confinement fusion research. Rev. Sci. Instrum., 1981, 52, № 2, 183—190. Перевод: Жийяр, Ким, Тернбалл. Аппарат для приготовления сферических таблеток твердого водорода и нижекции их в плазму. Приборы для научн. исследований, 1981, № 2, 31—39.



Goedde E. F., Yuen M. C. [1] Experiments on liquid jet instability. J. Fluid Mech., 1970, 40, № 3, 495—511 — РЖМех, 1970, 8Б634.

Goldin M., Pfejfer R., Shinnar R. [1] Break-up of a capillary jet of a non-Newtonian fluid having a yield stress. Chem. Eng. J., 1972, 4, № 1, 8—20 — РЖМех, 1973, 3Б1157.

Goldin M., Yerushalmi J., Pfejfer R., Shinnar R. [1] Breakup of a laminar capillary jet of viscoelastic fluid. J. Fluid Mech., 1969, 38, № 4, 689—711 — РЖМех, 1970, 6Б1122.

Goodman R. K., Hunt A. L. [1] Ammonia-pellet generation system for the Baseball II-T target plasma experiment. Rev. Sci. Instrum., 1977, 48, № 2, 176—180 — РЖМех, 1977, 9Б380. Перевод: Гудмен, Хант. Система получения таблеток аммиака для эксперимента с лазерной плазмой Baseball II-T. Приборы для научн. исследований, 1977, № 2, 82—87.

Gordon M., Yerushalmi J., Shinnar R. [1] Instability of jets of non-Newtonian fluids. Trans. Soc. Rheol., 1973, 17, № 2, 303—324 — РЖМех, 1973, 11Б956.

Goren S., Gavis J. [1] Transverse wave motion on a thin capillary jet of a viscoelastic liquid. Phys. Fluids, 1961, 4, № 5, 575—579 — РЖМех, 1962, 2Б816.

Goren S. L., Gottlieb M. [1] Surface-tension-driven breakup of viscoelastic liquid threads. J. Fluid Mech., 1982, 120, 245—266 — РЖМех, 1982, 12Г284.

Gospodinov P., Penchev I., Radev S. [1] Velocity profiles and form of a laminar jet in immiscible liquid-liquid systems. Int. J. Multiphase Flow, 1979, 5, № 1, 87—99 — РЖМех, 1980, 1Б514.

Grant R. P., Middleman S. [1] Newtonian jet stability. AIChE Journal, 1966, 12, № 4, 669—678 — РЖМех, 1967, 5Б365.

Green A. E. [1] On the nonlinear behaviour of fluid jets. Int. J. Eng. Sci., 1976, 14, № 1, 49—63 — РЖМех, 1976, 6Б75.

Green A. E. [2] On the steady motion of jets with elliptical section. Acta mech., 1977, 26, № 1—4, 171—177 — РЖМех, 1977, 12Б17.

Green A. E., Laws N. [1] Ideal fluid jets. Int. J. Eng. Sci., 1968, 6, № 6, 317—328.

Green A. E., Naghdi P. M. [1] Non-isothermal theory of rods, plates and shells. Int. J. Solids and Struct., 1970, 6, № 2, 209—244 — РЖМех, 1970, 9Б62.

Gupta R. K., Metzner A. B., Wissbrun K. F. [1] Modeling of polymeric film-blowing processes. Polym. Eng. Sci., 1982, 22, № 3, 172—181 — РЖМех, 1982, 9Г245.

Haentlein A. [1] Über den Zerfall eines Flüssigkeitsstrahles. Forsch. Ingenieurw., 1931, 2, № 4, 139—149. Перевод: Генлейн А. Распад струи жидкости. В сб.: Двигатели внутреннего сгорания. Т. 1. М.-Л.; ОНТИ, 1936, 5—24.

Hagerty W. W., Shea J. F. [1] A study of the stability of plane fluid sheets. J. Appl. Mech., 1955, 22, № 4, 509—514 — РЖМех, 1960, 7391.

Han C. D. [1] Rheology in polymer processing. New York: Acad. Press, 1976. Перевод: Хан Чанг Дей. Реология в процессах переработки полимеров. М.; Химия, 1979.

Han C. D., Kim Y. W. [1] Studies on melt spinning. VI. The effect of deformation history on elongational viscosity, spinnability, and thread instability. J. Appl. Polym. Sci., 1976, 20, № 6, 1555—1571 — РЖМех, 1977, 1Б806.

Han C. D., Lamonte R. R., Shah Y. T. [1] Studies on melt spinning. III. Flow instabilities in melt spinning: melt fracture and draw resonance. J. Appl. Polym. Sci., 1972, 16, № 12, 3307—3323.

Han C. D., Shetty R. [1] Flow instability in tubular film blowing. I. Experimental study. Ind. Eng. Chem. Fundam., 1977, 16, № 1, 49—56 — РЖМех, 1977, 8Б850.

Hertz C. H., Hermanrud B. [1] A liquid compound jet. J. Fluid Mech., 1983, 131, 271—287 — РЖМех, 1984, 2Б434.

Hewitt P., Schetz J. A. [1] Atomization of impinging liquid jet in a supersonic crossflow. AIAA Journal, 1983, 21, № 2, 178—179 — РЖМех, 1983, 7Б468.

- Hoffman M. A., Takahashi R. K., Monson R. D.* [1] Annular liquid jet experiments. *Trans. ASME: J. Fluids Eng.*, 1980, 102, № 3, 344—349 — *РЖМех*, 1981, 4Б702. Перевод: *Гоффман, Такахаши, Монсон*. Эксперименты с кольцевой струей жидкости. Теор. основы инж. расчетов, 1980, 102, № 3, 156—165.
- Hoult D. P.* [1] Oil spreading on the sea. *Annu. Rev. Fluid Mech.* Vol. 4. Palo Alto, Calif., 1972, 341—368.
- Hoyt J. W., Taylor J. J.* [1] Waves on water jets. *J. Fluid Mech.*, 1977, 83, № 1, 119—127 — *РЖМех*, 1978, 4Б565.
- Hoyt J. W., Taylor J. J.* [2] Elliptical water jets. *AIAA Journal*, 1978, 16, № 1, 85—87 — *РЖМех*, 1978, 8Б1059. Перевод: *Хойт Дж. В., Тейлор Дж. Дж.* Водяные струи, истекающие из эллиптических отверстий. Ракетная техн. и космонавтика, 1978, 16, № 1, 107—109.
- Hoyt J. W., Taylor J. J.* [3] Effect of nozzle shape and polymer additives on water jet appearance. *Trans. ASME: J. Fluids Eng.*, 1979, 101, № 3, 304—308 — *РЖМех*, 1980, 7Б880. Перевод: *Хойт, Тэйлор*. Влияние формы сопла и полимерных добавок на внешний вид водяной струи. Теор. основы инж. расчетов, 1979, 101, № 3, 152—157.
- Hoyt J. W., Taylor J. J.* [4] Water-jet photography. *Nav. Res. Rev.*, 1982, 34, № 4, 3—9 — *РЖМех*, 1983, 9Б347.
- Hoyt J. W., Taylor J. J., Runge C. D.* [1] The structure of water and polymer jets in air. *J. Fluid Mech.*, 1974, 63, № 4, 635—640 — *РЖМех*, 1974, 12Б1194.
- Huang J. C. P.* [1] The break-up of axisymmetric liquid sheets. *J. Fluid Mech.*, 1970, 43, № 2, 305—320.
- Huebner A. L., Chu H. N.* [1] Instability and breakup of charged liquid jets. *J. Fluid Mech.*, 1971, 49, № 2, 361—372 — *РЖМех*, 1972, 2Б96.
- Hyun J. C.* [1] Theory of draw resonance. Part I: Newtonian fluids. *AIChE Journal*, 1982, 24, № 2, 418—422.
- Hyun J. C.* [2] Theory of draw resonance. Part II: Power-law and Maxwell fluids. *AIChE Journal*, 1982, 24, № 2, 423—426.
- Iciek J.* [1] The hydrodynamics of a free, liquid jet and their influence on direct contact heat transfer I: Hydrodynamics of a free, cylindrical liquid jet. *Int. J. Multiphase Flow*, 1982, 8, № 3, 239—249 — *РЖМех*, 1982, 11Б104.
- Iciek J.* [2] The hydrodynamics of a free, liquid jet and their influence on direct contact heat transfer. II: Conditions of change of liquid outflow type through sharp inlet edged orifice. *Int. J. Multiphase Flow*, 1982, 8, № 3, 251—260 — *РЖМех*, 1982, 11Б105.
- Iciek J.* [3] The hydrodynamics of a free, liquid jet and their influence on direct contact heat transfer—III. Direct contact heating of a cylindrical, free falling liquid jet. *Int. J. Multiphase Flow*, 1983, 9, № 2, 167—179 — *РЖМех*, 1983, 8Б166.
- Ide Y., White J. L.* [1] The spinnability of polymer fluid filaments. *J. Appl. Polym. Sci.*, 1976, 20, № 9, 2511—2531.
- Ide Y., White J. L.* [2] Investigation on failure during elongational flow of polymer melts. *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 1977, 2, № 3, 281—298.
- Ishihara H., Kase S.* [1] Studies on melt spinning. V. Draw resonance as a limit cycle. *J. Appl. Polym. Sci.*, 1975, 19, № 2, 557—565.
- Ishihara H., Kase S.* [2] Studies on melt spinning. VI. Simulation of draw resonance using Newtonian and power law viscosities. *J. Appl. Polym. Sci.*, 1976, 20, № 1, 169—191 — *РЖМех*, 1976, 10Б916.
- Janna W. S., John J. E. A.* [1] Drop-size distributions of Newtonian and Bingham liquid sprays produced by fan-jet pressure nozzles with and without the preorifice. *Trans. ASME: J. Eng. Ind.*, 1981, 103, № 4, 402—408.
- Jepson W. P.* [1] The effect of surfactive agents on the growth of waves on thin liquid sheets. *Trans. Can. Soc. Mech. Eng.*, 1980—1981, 6, № 4, 203—209 — *РЖМех*, 1983, 6Б92.
- Joseph D. D., Nguyen K., Matta J. E.* [1] Jets into liquid under gravity. *J. Fluid Mech.*, 1983, 128, 443—468 — *РЖМех*, 1983, 10Г232.
- Kakutani T., Inoue Y., Kan T.* [1] Nonlinear capillary waves on the surface of liquid column. *J. Phys. Soc. Japan*, 1974, 37, № 2, 529—538.

*Kase S.* [1] Studies on melt spinning. IV. On the stability of melt spinning. *J. Appl. Polym. Sci.*, 1974, 18, № 11, 3279—3303.

*Kase S., Matsuo T.* [1] Studies on melt spinning. I. Fundamental equations on the dynamics of melt spinning. *J. Polym. Sci., Pt. A*, 1965, 3, № 7, 2541—2554.

*Kase S., Nomura T., Yamamoto M.* [1] Uniaxial extension of an isothermal fluid cylinder in the presence of inertia, surface tension and gravity. *Rheol. acta*, 1982, 21, № 1, 36—51—*РЖМех*, 1983, 4Г272.

*Keller J. B., Rubinow S. I., Tu Y. O.* [1] Spatial instability of a jet. *Phys. Fluids*, 1973, 16, № 12, 2052—2055—*РЖМех*, 1974, 10Б568.

*Kitamura Y., Mishima H., Takahashi T.* [1] Stability of jets in liquid-liquid systems. *Can. J. Chem. Eng.*, 1982, 60, № 6, 723—731—*РЖМех*, 1983, 6Г119.

*Kitamura Y., Takahashi T.* [1] Breakup of jets in power law non-Newtonian—Newtonian liquid systems. *Can. J. Chem. Eng.*, 1982, 60, № 6, 732—737—*РЖМех*, 1983, 5Г226.

*Kordyban E.* [1] Oil thickness variation on wavy water in the presence of wind. *Trans. ASME: J. Fluids Eng.*, 1982, 104, № 1, 81—87—*РЖМех*, 1983, 9Г391. Перевод: *Кордибан*. Изменение толщины слоя нефти на волнистой поверхности воды при наличии ветра. Теор. основы инж. расчетов, 1982, 104, № 1, 137—144.

*Kroesser F. W., Middleman S.* [1] Viscoelastic jet stability. *AIChE Journal*, 1969, 15, № 3, 383—386—*РЖМех*, 1970, 5Б1146.

*Kuhn L., Myers R. A.* [1] Ink-jet printing. *Sci. Amer.*, 1979, 240, № 4, 120—132.

*Lafrance P.* [1] Nonlinear breakup of a liquid jet. *Phys. Fluids*, 1974, 17, № 10, 1913—1914—*РЖМех*, 1975, 5Б565.

*Lafrance P.* [2] Nonlinear breakup of a laminar liquid jet. *Phys. Fluids*, 1975, 18, № 4, 428—432—*РЖМех*, 1975, 10Б420.

*Lafrance P.* [3] The breakup length of turbulent liquid jets. *Trans. ASME: J. Fluids Eng.*, 1977, 99, № 2, 414—415—*РЖМех*, 1978, 1Б150. Перевод: *Лафранс*. Длина распада турбулентных жидких струй. Теор. основы инж. расчетов, 1977, 99, № 2, 245—246.

*Lafrance P., Aiello G., Ritter R. C., Trefil J. S.* [1] Drop spectrometry of laminar and turbulent jets. *Phys. Fluids*, 1974, 17, № 7, 1469—1470—*РЖМех*, 1975, 4Б710.

*Lafrance P., Ritter R. C.* [1] Capillary breakup of a liquid jet with a random initial perturbation. *Trans. ASME: J. Appl. Mech.*, 1977, 44, № 3, 385—388—*РЖМех*, 1978, 4Б564.

*Lee H. C.* [1] Drop formation in a liquid jet. *IBM J. Res. and Develop.*, 1974, 18, № 4, 364—369—*РЖМех*, 1975, 3Б688.

*Lee W. K., Flumerfelt R. W.* [1] Instability of stationary and uniformly moving cylindrical fluid bodies. I. Newtonian systems. *Int. J. Multiphase Flow*, 1981, 7, № 4, 363—383.

*Lee W. K., Yu K. L., Flumerfelt R. W.* [1] Instability of stationary and uniformly moving cylindrical fluid bodies. II. Viscoelastic threads and experimental observations. *Int. J. Multiphase Flow*, 1981, 7, № 4, 385—400.

*Maldarelli C., Jain R. K., Ivanov I. B., Ruckenstein E.* [1] Stability of symmetric and unsymmetric thin liquid films to short and long wavelength perturbations. *J. Colloid and Interface Sci.*, 1980, 78, № 1, 118—143.

*Maldarelli C., Jain R. K.* [1] The linear, hydrodynamic stability of an interfacially perturbed, transversely isotropic, thin planar viscoelastic film. I. General formulation and a derivation of the dispersion equation. *J. Colloid and Interface Sci.*, 1982, 90, № 1, 233—262—*РЖМех*, 1983, 5Г147.

*Martinon J.* [1] Stability of capillary cylindrical jets in external flow. *Z. angew. Math. und Phys.*, 1983, 34, № 5, 575—582—*РЖМех*, 1984, 3Б8.

*Matovich M. A., Pearson J. R. A.* [1] Spinning a molten threadline. Steady-state viscous flows. *Ind. and Eng. Chem. Fundam.*, 1969, 8, № 3, 512—520.

*Matta J. E., Tytus R. P.* [1] Viscoelastic breakup in a high velocity airstream. *J. Appl. Polym. Sci.*, 1982, 27, № 2, 397—405—*РЖМех*, 1982, 8Г248.

- Matta J. E., Tytus R. P., Harris J. L.* [1] Aerodynamic atomization of polymeric solutions. *Chem. Eng. Commun.*, 1983, 19, № 4—6, 191—204 — PЖMex, 1983, 8Г242.
- McCarthy M. J., Molloy N. A.* [1] Review of stability of liquid jets and the influence of nozzle design. *Chem. Eng. J.*, 1974, 7, № 1, 1—20.
- Metzner A. B., Metzner A. P.* [1] Stress levels in rapid extensional flows of polymeric fluids. *Rheol. acta*, 1970, 9, № 2, 174—181.
- Mewis J., De Cleyn G.* [1] Shear history effects in the spinning of polymers. *AICHE Journal*, 1982, 28, № 6, 900—907—PЖMex, 1983, 7Г290.
- Middleman S.* [1] Fundamentals of polymer processing. New York: McGraw-Hill, 1977.
- Middleman S., Gavis J.* [1] Transverse wave motion on a thin capillary jet of a viscous liquid. *Phys. Fluids*, 1965, 8, № 2, 222—229—PЖMex, 1965, 8Б618.
- Mikami T., Cox R. G., Mason S. G.* [1] Breakup of extending liquid threads. *Int. J. Multiphase Flow*, 1975, 2, № 2, 113—138—PЖMex, 1976, 5Б641.
- Mikami T., Mason S. G.* [1] The capillary breakup of a binary liquid column inside a tube. *Can. J. Chem. Eng.*, 1975, 53, № 4, 372—377.
- Minoshima W., White J. L.* [1] Multiaxial elongational flow of sheets and annular cylinders: growth of disturbances. *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 1982, 11, № 1—2, 127—145—PЖMex, 1983, 1Г237.
- Minoshima W., White J. L.* [2] Stability of continuous film extrusion process. *Polym. Eng. Reviews*, 1983, 2, № 3, 212—226.
- Miyake Y., Mukai E., Iemoto Y.* [1] On a two-dimensional laminar liquid jet. *Bull. JSME*, 1979, 22, № 172, 1382—1389—PЖMex, 1980, 4Б221.
- Moore C. A., Pearson J. R. A.* [1] Experimental investigations into an isothermal spinning threadline. Extensional rheology of Separan AP30 solution in glycerol and water. *Rheol. acta*, 1975, 14, № 5, 436—446.
- Mottern J. W., Privott W. J.* [1] Spinning wire from molten metal. *AICHE Symp. Ser.*, 1978, 74, № 180, 116 pp.
- Munson B. R.* [1] Viscous buckling of slender horizontal jets. *Phys. Fluids*, 1981, 24, № 10, 1780—1783—PЖMex, 1982, 6Б90.
- Naghdi P. M.* [1] On the applicability of directed fluid jets to Newtonian and non-Newtonian flows. *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 1979, 5, 233—265—PЖMex, 1979, 11Б898.
- Nakamura K., Watanabe T., Amano T., Katayama K.* [1] Some aspects of nonisothermal crystallization of polymers. III. Crystallization during melt spinning. *J. Appl. Polym. Sci.*, 1974, 18, № 2, 615—623.
- Nayfeh A. H.* [1] Non-linear stability of a liquid jet. *Phys. Fluids*, 1970, 13, № 4, 841—847—PЖMex, 1970, 11Б589.
- Nayfeh A. H., Hassan S. D.* [1] The method of multiple scales and non-linear dispersive waves. *J. Fluid Mech.*, 1971, 48, № 3, 463—475—PЖMex, 1972, 1Б511.
- Nelson N. K., Berg J. C.* [1] The effect of chemical reaction on the breakup of liquid jets. *Chem. Eng. Sci.*, 1982, 37, № 7, 1067—1078—PЖMex, 1982, 12Г243.
- Nickell R. E., Tanner R. I., Caswell B.* [1] The solution of viscous incompressible jet and free surface flows using finite element methods. *J. Fluid Mech.*, 1974, 65, № 1, 189—206—PЖMex, 1975, 3Б884.
- Omodei B. J.* [1] Computer solutions of a plane Newtonian jet with surface tension. *Comput. and Fluids*, 1979, 7, № 2, 79—96—PЖMex, 1979, 12Б96.
- Omodei B. J.* [2] On the die-swell of an axisymmetric Newtonian jet. *Comput. and Fluids*, 1980, 8, № 3, 275—289—PЖMex, 1980, 12Б108.
- Paek U. C., Runk R. B.* [1] Physical behaviour of the neck-down region during furnace drawing of silica fibers. *J. Appl. Phys.*, 1978, 49, № 8, 4417—4422.
- Pearson J. R. A., Matovich M.* [1] Spinning a molten threadline. Stability. *Ind. and Eng. Chem. Fundam.*, 1969, 8, № 4, 605—609.

*Pearson J. R. A., Petrie C. J. S.* [1] The flow of a tubular film. Part 1. Formal mathematical representation. *J. Fluid Mech.*, 1970, 40, № 1, 1—19 — *РЖМех*, 1970, 7Б798.

*Pearson J. R. A., Petrie C. J. S.* [2] The flow of a tubular film. Part 2. Interpretation of the model and discussion of solutions. *J. Fluid Mech.*, 1970, 42, № 3, 609—625 — *РЖМех*, 1971, 1Б847.

*Pearson J. R. A., Shah Y. T.* [1] Stability analysis of the fiber spinning process. *Trans. Soc. Rheol.*, 1972, 16, № 3, 519—533 — *РЖМех*, 1973, 3Б1182.

*Pearson J. R. A., Shah Y. T.* [2] On the stability of isothermal and non-isothermal fiber spinning of power-law fluids. *Ind. and Eng. Chem. Fundam.*, 1974, 13, № 2, 134—138 — *РЖМех*, 1974, 12Б1192.

*Pearson J. R. A., Shah Y. T., Mhaskar R. D.* [1] On the stability of fiber spinning of freezing fluids. *Ind. and Eng. Chem. Fundam.*, 1976, 15, № 1, 31—37 — *РЖМех*, 1976, 11Б913.

*Penchev I. P., Radev S. P.* [1] Analysis of the stability of a contracting jet in a liquid-liquid system. *Теор. и прил. мех.*, 1977, 8, № 3, 16—22 — *РЖМех*, 1978, 4Б769.

*Petrie C. J. S., Denn M. M.* [1] Instabilities in polymer processing. *AIChE Journal*, 1976, 22, № 2, 209—236.

*Phinney R. E.* [1] Stability of a laminar viscous jet — the influence of the initial disturbance level. *AIChE Journal*, 1972, 18, № 2, 432—434 — *РЖМех*, 1972, 10Б529.

*Phinney R. E.* [2] Stability of a laminar viscous jet. The influence of an ambient gas. *Phys. Fluids*, 1973, 16, № 2, 193—196 — *РЖМех*, 1973, 7Б557.

*Phinney R. E.* [3] The breakup of a turbulent liquid jet in a gaseous atmosphere. *J. Fluid Mech.*, 1973, 60, № 4, 689—701 — *РЖМех*, 1974, 3Б531.

*Phinney R. E.* [4] Breakup of a turbulent liquid jet in a low pressure atmosphere. *AIChE Journal*, 1975, 21, № 5, 996—999 — *РЖМех*, 1976, 5Б640.

*Pimbley W. T.* [1] Drop formation from a liquid jet: A linear one-dimensional analysis considered as boundary value problem. *IBM J. Res. and Develop.*, 1976, 20, № 2, 148—156.

*Pimbley W. T., Lee H. C.* [1] Satellite droplet formation in a liquid jet. *IBM J. Res. and Develop.*, 1977, 21, № 1, 21—30 — *РЖМех*, 1977, 11Б832.

*Radev S., Chavdarov B., Penchev I.* [1] On the instability of a liquid capillary jet flowing into an immiscible liquid. *Теор. и прил. мех.*, 1983, 14, № 1, 70—78 — *РЖМех*, 1983, 11Б351.

*Rayleigh, Lord* [1] The theory of sound. London: Macmillan, 1894. Перевод: Рэлей. Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955.

*Reddy K. R., Tanner R. I.* [1] Finite element solution of viscous jet with surface tension. *Comput. and Fluids*, 1978, 6, № 2, 83—91 — *РЖМех*, 1979, 4Б137.

*Rehbinder G.* [1] Investigation of water jet pulses generated by an impact piston device. *Appl. Sci. Res.*, 1983, 40, № 1, 7—37 — *РЖМех*, 1983, 9Б349.

*Reitz R. D., Bracco F. V.* [1] Ultra-high-speed filming of atomizing jets. *Phys. Fluids*, 1979, 22, № 6, 1054—1064 — *РЖМех*, 1980, 1Б563.

*Reitz R. D., Bracco F. V.* [2] Mechanism of atomization of a liquid jet. *Phys. Fluids*, 1982, 25, № 10, 1730—1742 — *РЖМех*, 1983, 5Б500.

*Ronay M.* [1] Determination of the dynamic surface tension of liquids from the instability of excited capillary jets and from the oscillation frequency of drops issued from such jets. *Proc. Roy. Soc. London*, 1978, A361, № 1705, 181—206 — *РЖМех*, 1978, 10Б677.

*Ronay M.* [2] Determination of the surface tension of inks from capillary instability of jets. *J. Colloid and Interface Sci.*, 1978, 66, № 1, 55—67.

*Rubin H.* [1] Breakup of viscoelastic liquid jets. *Isr. J. Technol.*, 1971, 9, № 6, 579—581 — *РЖМех*, 1972, 5Б1255.

*Rubin H., Wharshavsky M.* [1] A note on the breakup of viscoelastic liquid jets. *Isr. J. Technol.*, 1970, 8, № 4, 285—288 — *РЖМех*, 1971, 4Б987.

*Ryan M. E., Dutta A.* [1] The dynamics of parison free inflation in extrusion blow molding. *Polym. Eng. and Sci.*, 1982, 22, № 9, 569—577 — *РЖМех*, 1983, 1Г257.

Ryan M. E., Dutta A. [2] A mathematical modeling of the blow-molding process. *Polym. Eng. and Sci.*, 1982, 22, № 17, 1075—1083 — *РЖМех*, 1983, 10Г257.

Sagiv A., Rubin H., Takserman-Krozer R. [1] On the breakup of cylindrical liquid jets. *Isr. J. Technol.*, 1973, 11, № 5, 349—354 — *РЖМех*, 1974, 2Б1028.

Sagiv A., Takserman-Krozer R. [1] Capillary breakup of viscoelastic liquid jet of variable cross-section. *Rheol. acta*, 1975, 14, № 5, 420—426.

Scarlett B., Parkin C. S. [1] Droplet production on controlled jet breakup. *Chem. Eng. J.*, 1977, 13, № 2, 127—141.

Schetz J. A., Kush E. A., Joshi P. B. [1] Wave phenomena in liquid jet breakup in a supersonic crossflow. *AIAA Journal*, 1980, 18, № 7, 774—778 — *РЖМех*, 1981, 3Б1170. Перевод: Шец Дж. В., Куш Э. А., Джоши П. Б. Волновые процессы при распаде жидкой струи, инжектируемой по нормали в сверхзвуковой сносный поток. *Ракетная техн. и космонавтика*, 1980, № 7, 191—198.

Schultz W. W., Davis S. H. [1] One-dimensional liquid fibers. *J. Rheol.*, 1982, 26, № 4, 331—345 — *РЖМех*, 1983, 4Б71.

Schümmer P., Tebel K. H. [1] Instability of jets of non-Newtonian fluids. In: *Rheology. 2. Fluids*. New York: Plenum, 1980, 87—92.

Schümmer P., Tebel K. H. [2] Design and operation of the free jet elongational rheometer. *Rheol. acta*, 1982, 21, № 4—5, 514—516 — *РЖМех*, 1983, 5Г254.

Schümmer P., Tebel K. H. [3] A new elongational rheometer for polymer solutions. *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 1983, 12, № 3, 331—347 — *РЖМех*, 1983, 11Г171.

Shah Y. T., Pearson J. R. A. [1] On the stability of nonisothermal fibre spinning. *Ind. and Eng. Chem. Fundam.*, 1972, 11, № 2, 145—149 — *РЖМех*, 1972, 11Б620.

Shah Y. T., Pearson J. R. A. [2] On the stability of nonisothermal fibre spinning — general case. *Ind. and Eng. Chem. Fundam.*, 1972, 11, № 2, 150—153.

Shah Y. T., Pearson J. R. A. [3] Stability of fiber spinning of power law fluids. *Polym. Eng. Sci.*, 1972, 12, № 3, 219—223 — *РЖМех*, 1972, 10Б64.

Skelland A. H. P., Huang Y. F. [1] Dispersed phase mass transfer during drop formation under jetting conditions. *AIChE Journal*, 1977, 23, № 5, 701—714 — *РЖМех*, 1978, 7Б646.

Skelland A. H. P., Huang Y. F. [2] Continuous phase mass transfer during formation of drops from jets. *AIChE Journal*, 1979, 25, № 1, 80—87 — *РЖМех*, 1979, 8Б843.

Skelland A. H. P., Johnson K. R. [1] Jet breakup in liquid-liquid systems. *Can. J. Chem. Eng.*, 1974, 52, № 6, 732—738.

Smook J., Pennings A. J. [1] Preparation of ultra-high strength polyethylene fibres by gel-spinning/hot-drawing at high spinning rates. *Polymer Bull.*, 1983, 9, № 1—3, 75—80.

Squire H. B. [1] Investigation of the instability of a moving liquid film. *Brit. J. Appl. Phys.*, 1953, 4, № 6, 167—169 — *РЖМех*, 1953, 1147.

Sterling A. M., Steicher C. A. [1] The instability of capillary jets. *J. Fluid Mech.*, 1975, 68, № 3, 477—495 — *РЖМех*, 1975, 10Б404.

Stockman M. G., Bejan A. [1] The nonaxisymmetric (buckling) flow regime of fast capillary jets. *Phys. Fluids*, 1982, 25, № 9, 1506—1511 — *РЖМех*, 1983, 5Б106.

Sturges L. D. [1] A theoretical study of extrudate swell. *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 1981, 9, № 3—4, 357—378 — *РЖМех*, 1982, 5Г288.

Suleiman S. M., Munson B. R. [1] Viscous buckling of thin fluid layers. *Phys. Fluids*, 1981, 24, № 1, 1—5 — *РЖМех*, 1981, 8Б106.

Takahashi K. [1] A numerical analysis of flow using streamline coordinates. The case of two-dimensional steady incompressible flow. *Bull. JSME*, 1982, 25, № 209, 1696—1702 — *РЖМех*, 1983, 4Б459.

*Tarr L. E., Berg J. C.* [1] The effect of nonlinear concentration profiles on the breakup of jets undergoing mass transfer. *Chem. Eng. Sci.*, 1980, 35, № 6, 1465—1467 — *РЖМех*, 1980, 11Б654.

*Taub H. H.* [1] Investigation of nonlinear waves on liquid jets. *Phys. Fluids*, 1976, 19, № 8, 1124—1129 — *РЖМех*, 1977, 3Б67.

*Taylor G. I.* [1] The formation of emulsions in definable fields of flow. *Proc. Roy. Soc. London*, 1934, A146, № 858, 501—523.

*Taylor G.* [2] The dynamics of thin sheets of fluid. I. Water bells. *Proc. Roy. Soc. London*, 1959, A253, № 1274, 289—295 — *РЖМех*, 1961, 12Б455.

*Taylor G.* [3] The dynamics of thin sheets of fluid. II. Waves on fluid sheets. *Proc. Roy. Soc. London*, 1959, A253, № 1274, 296—312 — *РЖМех*, 1961, 12Б456.

*Taylor G.* [4] The dynamics of thin sheets of fluid. III. Disintegration of fluid sheets. *Proc. Roy. Soc. London*, 1959, A253, № 1274, 313—321 — *РЖМех*, 1962, 3Б419.

*Taylor G.* [5] Formation of thin flat sheets of water. *Proc. Roy. Soc. London*, 1960, № 1296, 1—17 — *РЖМех*, 1961, 12Б457.

*Taylor G. I.* [6] Instability of jets, threads, and sheets of viscous fluid. *Proc. 12th Int. Congr. Appl. Mech.*, Stanford, 1968. Stanford: Springer, 1969, 382—388.

*Taylor G. I.* [7] Electrically driven jets. *Proc. Roy. Soc. London*, 1969, A313, № 1515, 453—475.

*Thorne D. J.* [1] Melt extrusion for the formation of fibres. *Fibre Sci. and Technol.*, 1974, 7, № 1, 79—84 — *РЖМех*, 1974, 7Б1061.

*Tomita Y., Shimbo T., Ishibashi Y.* [1] Experimental studies of viscoelastic fluid flow. *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 1979, 5, 497—512 — *РЖМех*, 1979, 10Б1135.

*Tomita Y., Sudou K., Ishibashi Y.* [1] Effect of a magnetic and electrical field on the behaviour of liquid jets. *Bull. JSME*, 1979, 22, № 172, 1390—1398 — *РЖМех*, 1980, 3Б273.

*Tomotika S.* [1] On the instability of a cylindrical thread of a viscous liquid surrounded by another viscous liquid. *Proc. Roy. Soc. London*, 1935, A150, № 870, 322—337.

*Tomotika S.* [2] Breaking up of a drop of viscous liquid immersed in another viscous fluid which is extending at a uniform rate. *Proc. Roy. Soc. London*, 1936, A153, № 879, 302—318.

*Trogdon S. A., Joseph D. D.* [1] The stick-slip problem for a round jet. I. Large surface tension. *Rheol. acta*, 1980, 19, № 4, 404—420.

*Trogdon S. A., Joseph D. D.* [2] The stick-slip problem for a round jet. II. Small surface tension. *Rheol. acta*, 1981, 20, № 1, 1—13.

*Usui H., Sano Y.* [1] Elongational flow of dilute drag reducing fluids in a falling jet. *Phys. Fluids*, 1981, 24, № 2, 214—219 — *РЖМех*, 1981, 12Б669.

*Van de Sande E., Smith J. M.* [1] Jet break-up and air entrainment by low velocity turbulent water jets. *Chem. Eng. Sci.*, 1976, 31, № 3, 219—224 — *РЖМех*, 1976, 8Б954.

*Vrentas J. S., Vrentas C. M.* [1] Inertia and surface tension effects in Newtonian liquid jets. *Int. J. Multiphase Flow*, 1982, 8, № 5, 559—564 — *РЖМех*, 1983, 4Б130.

*Weber C.* [1] Zum Zerfall eines Flüssigkeitsstrahles. *Z. angew. Math. und Mech.*, 1931, 11, № 2, 136—154. Перевод: Вебер К. Распад струи жидкости. В сб.: Двигатели внутреннего сгорания. Т. 1, М.-Л.: ОНТИ, 1936, 25—54.

*Weih's D.* [1] Stability of thin, radially moving liquid sheets. *J. Fluid Mech.*, 1978, 87, № 2, 289—298 — *РЖМех*, 1979, 3Б124.

*Weih's D., Frankel I.* [1] Equilibrium shape and stability of a liquid cylinder in cross flow at low Weber numbers. *J. Fluid Mech.*, 1982, 116, 393—410.

*Weinberger C. B., Cruz-Saenz G.F., Donnelly G. J.* [1] Onset of draw resonance during isothermal melt spinning: a comparison between measurements and predictions. *AIChE Journal*, 1976, 22, № 3, 441—448 — *РЖМех*, 1977, 1Б805.

Wendel H., Bisch P. M., Gallez D. [1] Hydrodynamics of dielectric fluid films. *Colloid and Polym. Sci.*, 1982, 260, № 4, 425—434.

White J. C., Ide Y. [1] Rheology and dynamics of fiber formation from polymer melts. *Appl. Polym. Symp.*, 1975, № 27, 61—102 — *РЖМех*, 1976, 6B618.

Whitham G. B. [1] Linear and nonlinear waves. New York; London: Wiley, 1974 — *РЖМех*, 1975, 11B506. Перевод: Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977, 622 с.

Yeow Y. L. [1] On the stability of extending films: a model for the film casting process. *J. Fluid Mech.*, 1974, 66, № 3, 613—622 — *РЖМех*, 1975, 5B798.

Yeow Y. L. [2] Stability of tubular film flow: a model of the film blowing process. *J. Fluid Mech.*, 1976, 75, № 3, 577—591 — *РЖМех*, 1977, 3B107.

Yu H., Scheele G. F. [1] Laminar jet contraction and velocity distribution in immiscible liquid—liquid systems. *Int. J. Multiphase Flow*, 1975, 2, № 2, 153—169 — *РЖМех*, 1976, 5B597.

Yuen M. C. [1] Non-linear capillary instability of a liquid jet. *J. Fluid Mech.*, 1968, 33, № 1, 151—163 — *РЖМех*, 1969, 1B487.

Zak M. [1] Dynamics of liquid films and thin jets. *SIAM J. Appl. Math.*, 1979, 37, № 2, 276—289.

Ziabicki A. [1] Fundamentals of fibre formation. The science of fibre spinning. London: Wiley, 1976. Перевод: Зябицкий А. Теоретические основы формирования волокон. М.: Химия, 1979, 503 с.

---



## СОДЕРЖАНИЕ

(Соответствует рубрике 30.17 Рубрикатора ГАСНТИ)

<b>Б. А. Кадер, А. М. Яглом.</b> Влияние шероховатости и продольного градиента давления на турбулентные пограничные слои	3
Введение	3
<i>Глава 1.</i> Турбулентные течения вдоль шероховатой стенки	6
§ 1. Профиль средней скорости и закон сопротивления	7
§ 2. Профиль средней температуры и законы тепло- и массопереноса.	30
§ 3. Характеристики турбулентных пульсаций скорости и температуры	46
<i>Глава 2.</i> Турбулентный пограничный слой при наличии продольного градиента давления	51
§ 1. Профиль средней скорости вблизи стенки — логарифмический и градиентный подслои	54
§ 2. Профиль средней скорости во внешней области течения — закон дефекта скорости и «закон степени 1/2»	61
§ 3. Вывод закона сопротивления и расчет толщины пограничного слоя	70
§ 4. Профиль средней температуры и закон теплопереноса	74
§ 5. Статистические характеристики пульсаций скорости	80
Литература	93
<b>В. М. Ентов, А. Л. Ярин.</b> Динамика свободных струй и пленок вязких и реологически сложных жидкостей.	112
Введение	112
<i>Глава 1.</i> Капиллярный распад тонких свободных струй вязких ньютоновских жидкостей	113
§ 1. Стационарные конфигурации струй при истечении из насадков.	113
§ 2. Рост малых возмущений. Границы применимости теории Реллея—Вебера	116
§ 3. Квазиодномерный подход	123
§ 4. Нелинейная стадия капиллярного распада. Образование капель-сателлитов	126
§ 5. Влияние динамического действия окружающей среды, формы насадка, закрутки, электрического и магнитного полей и эффектов, связанных с тепло- и массопереносом. Распад жидких капель и нитей	129
<i>Глава 2.</i> Капиллярный распад тонких свободных струй реологически сложных жидкостей	132
§ 1. Распад струй нелинейно-вязких жидкостей	133
§ 2. Струи упруговязких жидкостей — экспериментальные исследования	137
§ 3. Теория капиллярного распада струй вязкоупругих жидкостей	139
<i>Глава 3.</i> Изгибные возмущения жидких струй. Высокоскоростные струи	144
§ 1. Изгибный распад высокоскоростных тонких струй вязких и реологически сложных жидкостей, движущихся в воздухе	144
§ 2. Продольный изгиб жидких струй и нитей	151

§ 3. Нерегулярный распад струй. Высокоскоростные струи, влияние турбулентности, распыливание . . . . .	153
<b>Глава 4.</b> Гидродинамика формирования волокон . . . . .	156
§ 1. Основные направления экспериментальных исследований . . . . .	156
§ 2. Кристаллизация и ориентация при формировании; сверхпрочные волокна . . . . .	159
§ 3. Теоретические исследования . . . . .	160
<b>Глава 5.</b> Свободные пленки жидкости . . . . .	167
§ 1. Общие уравнения. Стационарные динамические конфигурации свободных пленок . . . . .	167
§ 2. Свободные ребра на жидких пленках . . . . .	172
§ 3. Рост возмущений на свободных пленках и их разрушение . . . . .	174
Заключение. Некоторые приложения свободных струйных и пленочных течений ньютоновских и реологически сложных жидкостей в технике и научных исследованиях . . . . .	179
Литература . . . . .	181
<b>В. И. Полежаев.</b> Гидродинамика, тепло- и массообмен при росте кристаллов. . . . .	
Введение . . . . .	198
<b>Глава 1.</b> Общая теория . . . . .	200
§ 1. Предварительные замечания и классификация движений жидкой (газовой) фазы при росте кристаллов . . . . .	200
§ 2. Математическая формулировка и вопросы моделирования движений, переноса тепла и массы . . . . .	204
<b>Глава 2.</b> Некоторые закономерности и характерные свойства движений, представляющие интерес при росте кристаллов . . . . .	213
§ 1. Вынужденные изотермические течения . . . . .	213
§ 2. Тепловая гравитационная конвекция . . . . .	215
§ 3. Термокапиллярная и капиллярно-концентрационная конвекция . . . . .	222
§ 4. Взаимодействие отдельных видов движения . . . . .	224
§ 5. Действие магнитного и электрического полей . . . . .	229
<b>Глава 3.</b> Некоторые специальные методы выращивания кристаллов . . . . .	230
§ 1. Метод направленной кристаллизации . . . . .	230
§ 2. Метод Чохральского . . . . .	241
§ 3. Другие методы роста кристаллов . . . . .	251
<b>Глава 4.</b> Особенности процессов гидродинамики, тепло- и массообмена при росте кристаллов в невесомости . . . . .	252
Заключение . . . . .	258
Литература . . . . .	259
<b>С. А. Лосев.</b> Ударные трубы в современной газовой динамике. . . . .	
Введение . . . . .	270
§ 1. Развитие техники и теории ударных труб . . . . .	271
§ 2. Разработка методов диагностики . . . . .	282
§ 3. О проблемах моделирования процессов в ударных трубах . . . . .	292
§ 4. Результаты экспериментов . . . . .	295
Литература . . . . .	304

УДК 532.517.4+533.6.011.1+536.24

**Б. А. Кадер и А. М. Яглом. Влияние шероховатости и продольного градиента давления на турбулентные пограничные слои.** «Итоги науки и техн. ВИНТИ. Сер. Механика жидкости и газа», 1984, 18, с. 3—111

Дается обзор применений общих соображений размерности и подобия к плоскопараллельным (или осесимметричным параллельным) развитым турбулентным течениям при постоянном давлении вдоль шероховатой стенки и к развитым турбулентным течениям вдоль гладкой стенки при наличии отличного от нуля продольного градиента среднего давления. Подробно рассматриваются законы подобия, применимые к отдельным областям рассматриваемых течений (типа «законов стенки», «законов дефекта скорости и температуры», «логарифмических законов», «законов степени  $1/2$ » и т. д.). Указываются формулы для полных профилей скорости и температуры в исследуемых течениях, получаемые с помощью объединения нескольких законов подобия. Сложные выражения для нормированной скорости (или перепада температуры между стенкой и заданной точкой течения) и для дефекта скорости (или температуры), следующих из логарифмического закона (в случае нулевого градиента давления) или же из «закона степени  $1/2$ » (при отличном от нуля градиенте давления) применяется для вывода универсальных законов сопротивления и теплопереноса от стенки. Обсуждаются законы подобия, относящиеся к статистическим характеристикам турбулентных пульсаций (плотности вероятности, моментам пульсаций, спектрам и корреляционным функциям). В ходе изложения широко используются многочисленные эмпирические данные, которые привлекаются для проверки излагаемых выводов из теории подобия и размерностей и для определения значений универсальных постоянных и функций, входящих в получаемые общие закономерности.

УДК 532.521+532.522+532.525+532.135

**В. М. Ентов, А. Л. Ярин. Динамика свободных струй и пленок вязких и реологически сложных жидкостей.** «Итоги науки и техн. ВИНТИ. Сер. Механика жидкости и газа», 1984, 18, с. 112—197

Обзор посвящен анализу литературы за 1973—1983 гг. по динамике распространения и распада свободных тонких струй и пленок капельных жидкостей с различным реологическим поведением, а также рассмотрению гидродинамики струйных течений, возникающих при формировании волокон. Изложены основные результаты, касающиеся капиллярного распада тонких струй и влияния на него нелинейных эффектов, ведущих к образованию спутанных капель, динамического действия окружающей среды, условий движения жидкости в насадке, электромагнитных полей, тепло- и массопереноса на поверхности и реологической сложности жидкости (псевдопластичности, дилатансии и вязкоупругости). Освещены процессы изгибного распада тонких высокоскоростных ламинарных струй, движущихся в воздухе, и выпучивания струй и пленок при продольном сжатии. Рассмотрены данные о свободных турбулентных струях, распыливании и расплющивании струй, движущихся с очень большими скоростями в воздухе. При анализе гидродинамических основ процессов формирования волокон и пленок основное внимание уделено устойчивости. Рассмотрены процессы распространения и роста изгибных возмущений и возмущений толщины на свободных жидких пленках, а также динамика жидких ребер на их свободных краях. При изложении результатов теоретических работ выделены квазиодномерный (для струй) и квазидвумерный (для пленок) подходы, получившие всестороннее развитие в течение последнего десятилетия.

УДК 532.516+536.33

**В. И. Полежаев. Гидродинамика, тепло- и массообмен при росте кристаллов.** «Итоги науки и техн. ВИНТИ. Сер. Механика жидкости и газа», 1984, 18, с. 198—269

Процессы гидродинамики, тепло- и массообмена являются в некотором смысле связующим звеном между условиями роста кристаллов, их структурой и свойствами. Интенсивное исследование этих процессов в земных условиях и условиях невесомости направлено на создание методов управления ростом кристаллов и на улучшение качества кристаллов.

Представлен обзор работ, выполненных в последние пять—семь лет по физическому и математическому моделированию процессов гидродинамики, тепло- и массообмена при росте объемных монокристаллов. Рассматриваются результаты исследования влияния этих процессов на макро- и микро неоднородность распределения примесей в кристаллах.

Главное внимание уделяется моделям роста кристаллов из расплава (методы Бриджмена и Чохральского). Обсуждаются также результаты исследования некоторых общих закономерностей, относящихся к различным методам роста кристаллов, в том числе в условиях невесомости.

УДК 533.6.011.72

**С. А. Лосев. Ударные трубы в современной газовой динамике.** «Итоги науки и техн. ВИНТИ. Сер. Механика жидкости и газа», 1984, 18, 270—311

Рассматриваются последние достижения в развитии техники и теории ударных труб, методов диагностики и указаны наиболее значительные результаты, полученные в опытах на ударных трубах в последние годы. Отмечена основная особенность современного эксперимента на ударных трубах, связанная с широким внедрением одновременно развивающихся методов вычислительного эксперимента на основе построения математических моделей процессов в ударных волнах и охлаждающихся потоках. Указаны основные тенденции развития методов измерения на ударных трубах, подчеркнута роль лазерной диагностики и методов многоканальных и локальных измерений. Приведены примеры изучения теплообмена летательных аппаратов, динамики ударных волн и волновых взаимодействий, устойчивости ударных волн, способов создания неравновесных сред методами газовой динамики, кинетики процессов в физико-химической газодинамике.

UDC 532.517.4+533.6.011.1+536.24

B. A. Kader, A. M. Yaglom. The influence of roughness and longitudinal pressure gradient on turbulent boundary layers. «Advances in Science and Technology of VINITI (Itogi Nauki i Tekhniki VINITI). Ser. Mechanics of Fluids and Gases», 1984, v. 18, p. 3—111

General dimensional and similarity arguments are applied to the plane parallel (or axisymmetric parallel) fully turbulent constant-pressure flows along a rough wall and pressure-gradient flows along a smooth wall. The similarity laws for specific regions of the flows (e. g. «wall laws», «velocity and temperature defect laws», «logarithmic laws», «half-power laws» etc.) are considered in detail. The equations for the complete velocity and temperature profiles are obtained from multilayer models combining several similarity laws. The addition of the equations for the normalized velocity or the temperature and for the normalized velocity or temperature defect implied by logarithmic law (in the constant-pressure case) or by «half-power law» (in the pressure-gradient case) is used to obtain the general friction law or the heat-transfer law for the studied turbulent wall flows. The similarity laws for the characteristics of turbulent fluctuations (the probability densities, fluctuation moments, spectra and correlation functions) are also considered. Numerous experimental data are used to verify the deductions from the similarity and dimensional analysis and to determine the universal functions and constants entering the similarity laws.

V. M. Entov, A. L. Yarin. The dynamics of free jets and films of viscous and non-Newtonian liquids. «Advances in Science and Technology of VINITI (Itogi Nauki i Tekhniki VINITI). Ser. Mechanics of Fluids and Gases», 1984, v. 18, p. 112—197

The review deals with the activity on dynamics and breakup of free thin liquid jets and films during last decade. The jet-like hydrodynamics of fiber formation is surveyed as well. The main results on capillary breakup of thin jets are presented including non-linear behaviour, satellite drops formation, influence of ambient air, external fields, surface heat- and mass transfer and complex rheological behaviour such as pseudoplasticity, dilatancy and viscoelasticity. The bending breakup of thin laminar high-speed jets in air is elucidated as well. The slow buckling of axially compressed jets and films is considered also. The high-speed effects for jets in air such as the influence of turbulence, squeezing and atomization are discussed. The hydrodynamics of fibre-forming and self-excited oscillations are treated at some length. General hydrodynamical equations of thin liquid films are presented and small lateral disturbances and breakup of films are analyzed. The dynamics of attached ribs on thin films is discussed. It is underlined that the main theoretical tools of hydrodynamics of thin objects are the quasi-one-dimensional (for jets) or the quasi-two-dimensional (for films) treatment developed during the last decade.

UDC 532.516+536.33

V. I. Polezhaev. Hydrodynamics, heat and mass transfer during crystal growth. «Advances in Science and Technology of VINITI (Itogi Nauki i Tekhniki VINITI). Ser. Mechanics of Fluids and Gases», 1984, v. 18, p. 198—269

The processes of hydrodynamics and heat and mass transfer serve as the links between the crystal growth conditions, crystal structures and their properties. Intensive studies of these processes are being conducted in order to elaborate methods for their control and to enhance the quality of crystals.

The review deals with the works that has been carried out over the last five—seven years on physical and mathematical simulation of hydrodynamics heat and mass transfer in growing bulk single crystals. The results of investigation of the impact of these processes on macro- and micro-inhomogeneities of crystals are also considered.

The main attention is centered on liquid phase crystal growth models (Bridgman and Czochralski). The results of the research into the general regularities of motion, heat and mass transfer relevant to different crystal growth techniques as well as to those of reduced gravity are discussed.

UDC 533.6.011.72

S. A. Losev. Shock tubes in modern gas dynamics. «Advances in Science and Technology of VINITI (Itogi Nauki i Tekhniki VINITI). Ser. Mechanics of Fluid and Gases», 1984, v. 18, p. 270—311

The latest achievements in the development of shock tube techniques theory, and methods of diagnostics are discussed. The most significant results achieved with shock tube experiments in the last years, are presented. The basic peculiarity of the modern experiment with shock tubes, is noted, which is connected with the simultaneous wide inculcation of the developing methods of numerical experiment on the basis of construction of mathematical models on processes both in shock waves and in cooling flows. The basis trends of development of measuring methods on shock tubes are pointed out. The role of laser diagnostics and methods of multichannels and local measurements are indicated. The following case studies are examined: heat exchange in flying vehicles, shock wave dynamics and wave interactions, shock wave stability, ways of non-equilibrium media formation by the methods of gas dynamics, the kinetics of processes in physico-chemical gas dynamics.

